

Haussner, Robert Karl
Abhandlungen ueber die
regelmaessigen Sternkoerper



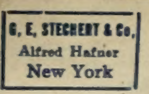
OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 151.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DIE
REGELMÄSSIGEN STERNKÖRPER

ABHANDLUNGEN
VON

L. POINSOT (1809)
A. L. CAUCHY (1811)
J. BERTRAND (1858)
A. CAYLEY (1859)

ENGELMANN IN LEIPZIG.



OSTWALDS KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhalt. der Kraft. (1847.) 6. Taus. (60 S.) *M* —.80.

» 2. **C. F. Gauss,** Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 2. Aufl. (60 S.) *M* —.80.

» 5. —— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. Dritte Auflage. (64 S.) *M* —.80.

» 10. **F. Neumann,** Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. i. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) *M* 3.—.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 2. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.

» 19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) *M* 2.—.

» 25. —— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (66 S.) *M* 1.20.

» 36. **F. Neumann,** Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.50.

» 46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) *M* 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 1.60.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt. Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.—.

Nr. 54. **J. H. Lambert,** Anmerk. und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) ℳ 1.60.

» 55. **Lagrange** und **Gauss,** Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 61. **G. Green,** Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell,** Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 75. **Axel Gadolin,** Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

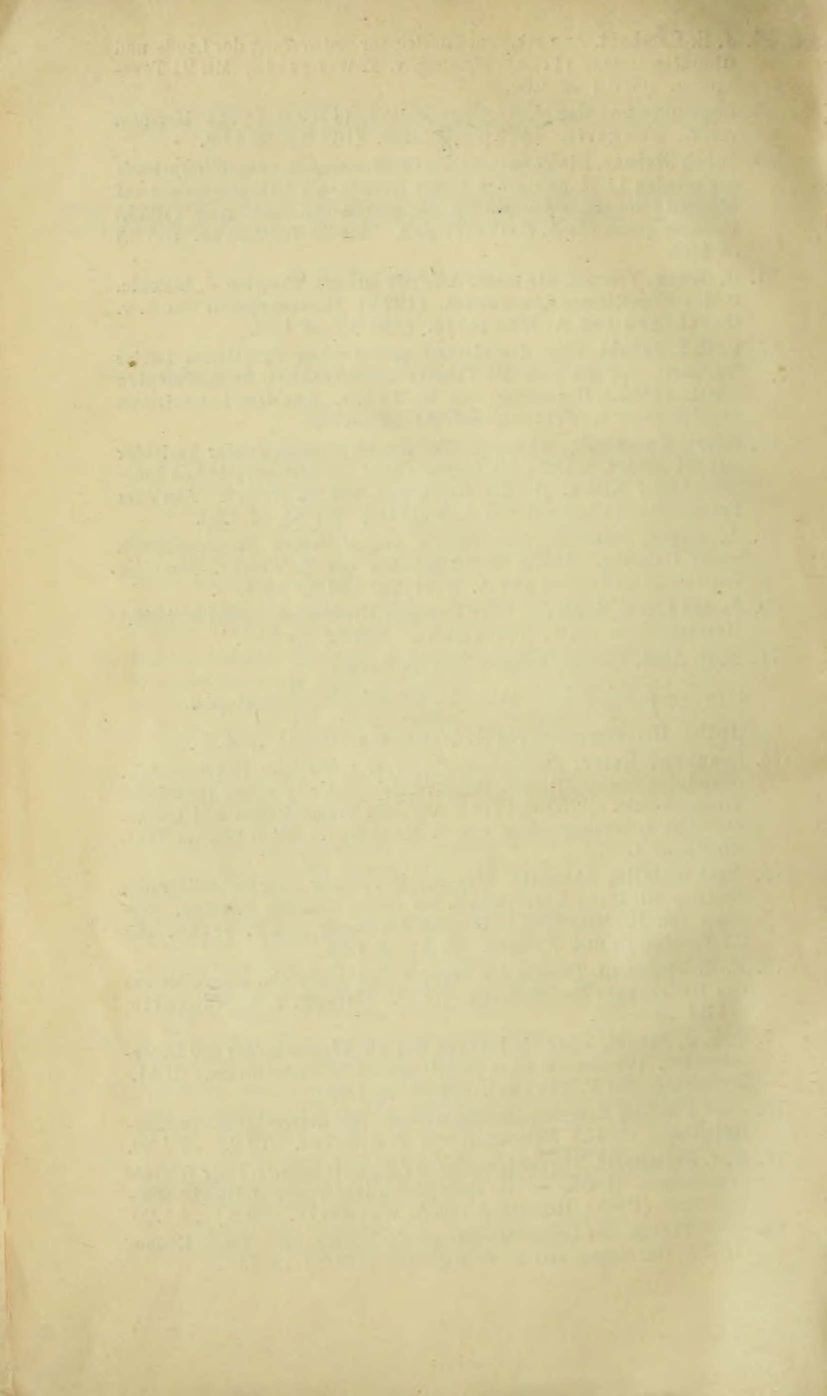
» 76. **F. E. Neumann,** Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz,** 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.—.



Abhandlungen

über die

regelmäßigen Sternkörper

(Abhandlungen)

von

L. Poinsot (1809), A. L. Cauchy (1811),
J. Bertrand (1858), A. Cayley (1859)

Übersetzt und herausgegeben

von

Robert Haußner (ed and tr.)

Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen,
sowie 4 Figuren auf 2 Tafeln.

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1906



Abhandlung über die Vielecke und Vielflache.

Von

M. Poinsot.

(Journal de l'École polytechnique, 10. cahier [Tome IV], p. 16—48. Paris 1810, und Mémoires présentés à l'institut des sciences, lettres et arts, par divers Savans et lus dans ses Assamblées. Sciences math. et phys., T. II, p. 552—591. Paris 1811. — Gelesen in der ersten Klasse des Institutes am 24. Juli 1809.)

Die folgenden Untersuchungen gehören der Situationsgeometrie an, weil bei ihnen weniger die Größe und die Proportion der Figuren, als vielmehr die Anordnung und die Lage der verschiedenen Elemente, aus denen die Figuren zusammengesetzt sind, betrachtet werden.

Dieser Teil der Geometrie, der nur die Lagen im Raume betrachtet, steht zu der gewöhnlichen Geometrie ungefähr in demselben Verhältnis, wie die Wissenschaft von den Eigenschaften der Zahlen zur Algebra, die die Wissenschaft von den Größen ist. Die Situationsgeometrie aber ist noch weniger ausgebildet als die Theorie der Zahlen [1]; man kennt von ihr bis jetzt weder die Grundsätze noch die Untersuchungsmethode. *Leibniz* scheint der erste gewesen zu sein, der diesen Zweig der Geometrie vorausgesehen hat, denn ihm verdankt man den Namen einer Wissenschaft, die erst noch entstehen muß. Er hat sogar eine Situationsrechnung (Analysis situs) zu geben versprochen, aber er ist gestorben, ohne irgend etwas darüber veröffentlicht zu haben, und man kann nur aufs äußerste bedauern, über diesen Gegenstand nicht die Gedanken eines so tief eindringenden, genialen Geistes zu kennen, der so geschickt war, auf allen dem menschlichen Geiste zugänglichen Forschungsgebieten neue Bahnen zu eröffnen.

Euler hat bekanntlich in den *Mémoires de Berlin* vom Jahre 1759, unter dem Titel »*Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse*« zum ersten Male das

wohlbekannte Problem des Rösselsprunges auf dem Schachbrette gelöst. *Vandermonde* gab dann in den *Mémoires de l'Académie des sciences pour* 1771 eine einfachere Lösung, die er mit Hilfe einer eigentümlichen, für diese Art von Problemen gebildeten Bezeichnung abgeleitet hat; diese Bezeichnungsweise wandte er auch zur Darstellung eines aus Reihen von Knoten mehrerer Fäden gebildeten Gewebes oder Netzes an. Ferner stellt in dem achten Bande der Petersburger Memoiren *Euler* die Aufgabe, alle Brücken, die über die Arme eines Inseln bildenden Flusses führen, zu überschreiten und zwar jede nur einmal[2]). Die hier angeführten Untersuchungen umfassen wohl alles, was auf dem Gebiete der Situationsgeometrie geleistet worden ist*).

---

*) Nach dem Artikel, den *d'Alembert* für die *Encyclopédie* über das Wort Situation verfaßt hat, würde es scheinen, als ob *Leibniz* unter seiner Analysis situs nur ein besonderes Verfahren verstanden hätte, das die Lage bei der Lösung eines Problemes in Rechnung zu ziehen gestattete; in der Art, daß man bei mehrfachen Lösungen gerade die eine Lösung, die man finden will, herausfinden könnte, weil sie die einzige ist, die den Zweck der Untersuchung genau innerhalb der betrachteten Grenzen erreicht. Man muß aber zugeben, daß dies nicht die Vorstellung ist, die man von der Analysis situs sich bilden muß, und daß ferner diese Art, Werte oder Wurzeln zu trennen, gerade infolge der Allgemeinheit, die mit Formeln notwendigerweise verknüpft ist, ganz und gar undurchführbar erscheint. Die Situationsgeometrie betrachtet vielmehr, wie ich oben gesagt habe, die Anordnung und die Lagen der Figuren im Raume, ohne Rücksicht auf ihre Größe und ihre Stetigkeit. Der Teil der Mathematik, der sich naturgemäß auf diesen Teil der Geometrie anwenden ließe, ist also die Wissenschaft von den Eigenschaften der Zahlen oder die unbestimmte Analysis, während selbstverständlich die gewöhnliche Analysis auf bestimmte geometrische Aufgaben und die Differentialrechnung auf die Theorie der stetigen Kurven sich erstreckt. Ich habe in den Leipziger Acta die Stelle nicht finden können, an der *Leibniz* etwas über die Situationsgeometrie gesagt hat; aber es will mir scheinen, daß er von ihr eine mit der von mir hier gegebenen übereinstimmende Vorstellung hatte, wofür wohl deutlich genug die folgende Stelle in einem seiner Briefe über mathematische Spiele spricht: »Nach den Spielen, die allein von Zahlen abhängen, kommen solche, bei denen auch die Stellung von Einfluß ist, wie bei dem Trictrac, dem Damenspiele und besonders dem Schachspiele. Das Solitär genannte Spiel hat mir recht gut gefallen. Ich habe es umgekehrt aufgefaßt, d. h. statt nach der Spielregel eine bestimmte Aufstellung der Steine auf dem Spielbrette zu zerstören, indem man mit einem Steine über einen andern hinweg auf einen leeren Platz springt und den übersprungenen Stein fortnimmt, habe

Nachdem uns Betrachtungen anderer Art dazu geführt hatten, einige der geometrischen Untersuchungen, die den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bilden, zu entwickeln, wollten wir feststellen, was andere Mathematiker über ähnliche Fragen, mit denen wir uns vorher doch niemals beschäftigt hatten, geschrieben haben könnten. Jedoch habe ich keine Untersuchung gefunden, die sich direkt auf unsere Theorie bezieht, und niemand, soviel mir bekannt ist, hat daran gedacht, die neuen Figuren zu betrachten, die wir hier studieren, und mit denen wir die Klasse kurze Zeit zu unterhalten uns beehren wollen.

Wir beginnen mit einigen unerläßlichen Definitionen, die auch sonst in der Geometrie von Vorteil sein können.

---

ich es für schöner gehalten, die Aufstellung, die auf jene Weise zerstört wird, aufzubauen, indem man einen übersprungenen Platz mit einem Steine ausfüllt. Auf diese Art könnte man sich jede beliebige Figur, deren Aufbau möglich ist, zu bilden vornehmen, und ohne Zweifel läßt sie sich aufbauen, wenn sie sich nach der gewöhnlichen Spielregel zerstören läßt. Aber zu was nutzt das? wird man fragen. Ich antworte: zur Vervollkommnung der Erfindungskunst, denn man muß Methoden besitzen, alle Möglichkeiten, die sich finden lassen, »auch wirklich zu erhalten«. Brief VIII, an *de Montmort*, Leibn. Opera philologica.) Dies alles bezieht sich, wie man sieht, sehr genau auf die Situationsgeometrie, verstanden in dem gleichen Sinne, wie es *Euler*, *Vandermonde* und *Condorcet* getan haben[3].

Was die Positionsgeometrie von *Carnot* anbetrifft, so ist zu bemerken, daß sie keineswegs das gleiche Ziel verfolgt. Ihr Verfasser hat vielmehr hauptsächlich im Sinne gehabt, durch reziproke Beziehungen von Figuren die wahre Theorie der negativen Größen aufzubauen. Hierüber kann man einen schnellen Überblick am Ende einer ausgezeichneten Abhandlung erhalten, die er seitdem unter der Überschrift »Sur la relation qui existe entre les distances mutuelles de cinq points pris dans l'espace«[4] veröffentlicht hat. Diese Abhandlung enthält auch über die dreiseitige Pyramide eine Reihe eleganter Sätze, die sich auf die gleichen gegebenen Stücke der Figur beziehen. Die einfachen und fruchtbaren Grundsätze von *Carnots* genialer Transversalentheorie verdienten, unter die Elemente der Geometrie aufgenommen zu werden.

I.

1. Es seien m beliebig in einer Ebene gelegene Punkte a, b, c, d, e, ... gegeben. Zieht man dann die m Geraden ab, bc, cd, ..., die je zwei aufeinanderfolgende Punkte verbinden, so nennen wir die von diesen m Geraden gebildete Figur, die einen geschlossenen Linienzug darstellt, ein **Vieleck**. In jedem der m Punkte stoßen also nur zwei Seiten aneinander und schließen einen Winkel ein, der einer der Winkel des Vielecks ist. Da aber zwei Seiten — ohne daß es nötig ist, sie zu verlängern — miteinander tatsächlich zwei Winkel bilden, von denen jeder den andern zu vier Rechten ergänzt, so müssen noch genau die Winkel gekennzeichnet werden, die zusammen die m Winkel des Vielecks bilden. Dies kann in folgender Weise geschehen.

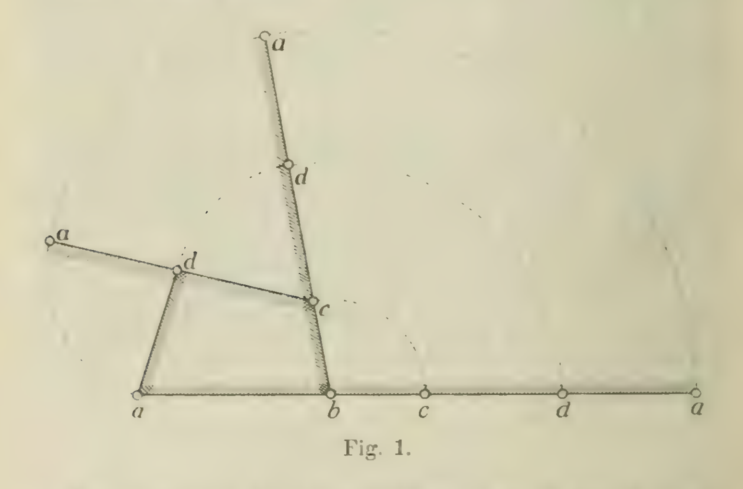


Fig. 1.

Man verlängere eine beliebige Seite, z. B. ab (Fig. 1) geradlinig über b hinaus, bis ihre ganze Länge $abc \ldots a$ gleich dem Umfange des Vielecks ist, und unterscheide dann an dieser

Linie zwei verschiedene Seiten oder Ufer, das rechte und linke Ufer, was der bequemeren Vorstellung wegen durch verschiedene Farben, das linke Ufer z. B. durch schwarze Farbe (in der Fig. 1 schraffiert), das rechte durch weiße Farbe, geschehen möge. Bricht man dann diese Gerade $abc \ldots a$ im Punkte b so weit um, daß der Rest $bc \ldots a$ durch den nächsten Punkt c geht; bricht hierauf weiter diesen Rest im Punkte c um, bis der Rest $c \ldots a$ durch den folgenden Punkt d geht, und fährt so fort, so erhält man wieder das gegebene Vieleck. Dann aber kann man in der Figur m von den weißen Ufern und m von den schwarzen Ufern eingeschlossene Winkel unterscheiden. Als Vieleckswinkel können dann nach Belieben entweder die m ersten oder die m letzten Winkel genommen werden. Um aber die für unsere Betrachtungen gänzlich überflüssige Zweideutigkeit zu vermeiden, wollen wir, wie gebräuchlich, als Vieleckswinkel diejenigen von den Ufern derselben Farbe eingeschlossenen m Winkel nehmen, deren Summe die kleinere ist. Bezeichnet man diese Summe mit A, so ist die Summe der m von den Ufern der andern Farbe gebildeten Winkel offenbar gleich $m \cdot 4R - A$, wo R den rechten Winkel[5] bezeichnet (Fig. 2).

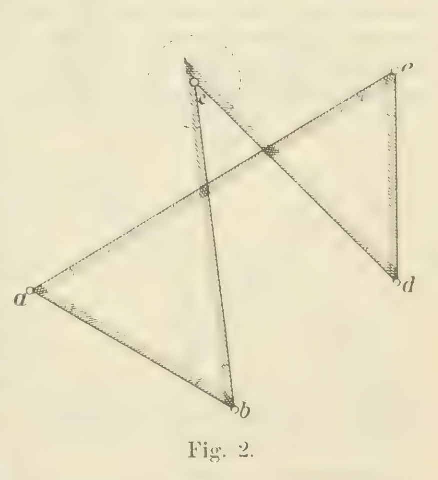


Fig. 2.

2. Im Gegensatze zu den Vieleckswinkeln, die häufig auch als Innenwinkel bezeichnet werden, nennt man Außenwinkel die Winkel, die von der Verlängerung einer Seite und der nächstfolgenden gebildet werden. Jeder dieser Winkel ist die Ergänzung des anliegenden Vieleckswinkels zu zwei Rechten, und zwar ist diese Ergänzung positiv, wenn der Vieleckswinkel kleiner als zwei Rechte, negativ dagegen, wenn letzterer größer als zwei Rechte ist (vgl. Fig. 3). Die Summe

aller Winkel, sowohl der Innenwinkel als der Außenwinkel, beträgt stets ebensovielmal zwei Rechte, als das Vieleck Seiten hat.

3. Besitzt das Vieleck einige Winkel, die größer als zwei Rechte sind, so kann man diese Winkel einspringende und im Gegensatze zu ihnen die andern ausspringende Winkel nennen (vgl. Fig. 2).

4. Konvexe Vieleke nennt man gewöhnlich solche, deren Umfang von einer beliebigen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten wird. Wir dagegen definieren ein Vieleck als konvex, wenn es keinen einspringenden, d. h. keinen Winkel größer als zwei Rechte hat. Diese Definition ist nicht nur

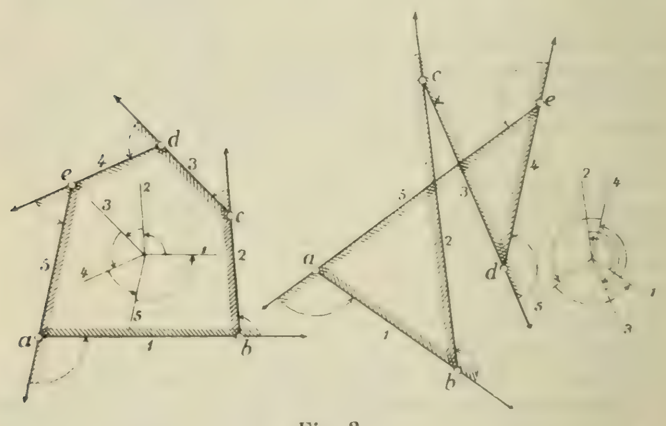


Fig. 3.

genauer als die sonst übliche — letztere macht streng genommen eine unendliche Anzahl von Versuchen erforderlich, um erkennen zu können, ob eine Figur konvex ist oder nicht —, sondern auch allgemeiner. Denn das, was die Konvexität eines Vieleckes ausmacht, ist nicht immer die Eigenschaft, daß sein Umfang von einer beliebigen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten wird, sondern daß jede Seite gegen die folgende in gleichem Sinne geneigt ist. Das will sagen: Überträgt man alle diese Neigungswinkel an einen der Eckpunkte des Vieleckes oder auf einen beliebigen andern Punkt durch

Parallelen zu den aufeinanderfolgenden Seiten des Vieleckes, so legen sich alle diese Winkel, die gleich den Außenwinkeln sind, immer in demselben Sinne aneinander, so daß keiner von ihnen den vorhergehenden Winkel überdeckt (Fig. 3).

5. Dreht sich die Gerade, die das Vieleck von neuem erzeugt, indem sie sich allmählich auf dessen Seiten aufwickelt, nur einmal durch den ganzen Winkelraum von vier Rechten, so kann der Umfang des Vieleckes von jeder beliebigen Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden. Muß aber die bewegliche Gerade, um die Figur schließen zu können, zwei oder mehr Umdrehungen durch den ganzen Winkelraum ausführen, so kann der Umfang des Vieleckes von einer Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten wer- werden, ohne daß das Vieleck in unserer strengeren Auffassung der Konvexität aufhört, *konvex* zu sein (Fig. 4).

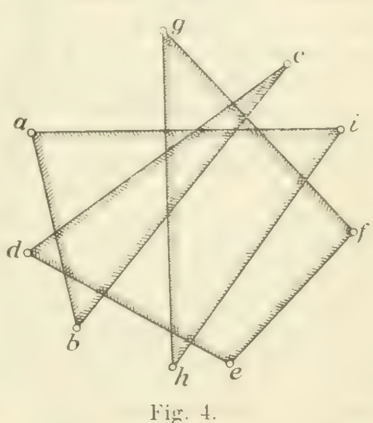


Fig. 4.

6. Macht man sich mit allen diesen allgemeinen Definitionen vertraut, so erkennt man, daß sie für die gewöhnlich betrachteten Figuren genau zutreffen. Wir behaupten nun aber weiter, daß es nicht nur verschiedene *Ordnungen* von Vielecken, d. h. Vielecke von 3, 4, 5, 6, . . ., m Seiten gibt, sondern daß in jeder Ordnung noch verschiedene *Arten* von Vielecken mit manchen sehr bemerkenswerten Eigenschaften zu unterscheiden sind.

Man erkennt z. B., daß das Dreieck nicht das einzige Vieleck ist, dessen Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, sondern daß es eine unendlich große Anzahl von Vielecken mit ungerader Seitenzahl gibt, die die gleiche Eigenschaft haben. Ferner gibt es unendlich viele Vielecke mit gerader Anzahl von Seiten, deren Winkelsumme gleich vier Rechten ist, wie dies für das Viereck gilt. Und ähnliche Eigenschaften mehr. Man glaube

aber nicht, daß diese Vielecke unregelmäßige Figuren sein müßten, deren Winkel teils ausspringende, teils einspringende sind, oder daß diese Vielecke aus einer Gruppe nicht zusammenhängender, übereinanderliegender Figuren beständen. Es sind vielmehr vollkommen einfache Figuren, die auch ganz regelmäßig, wie die gewöhnlichen Vielecke sein können. Um diese Untersuchung leichter verständlich zu machen, werden wir sogar in jeder Ordnung nur die regelmäßigen konvexen Vielecke betrachten, d. h. solche, deren sämtliche Winkel, und deren sämtliche Seiten gleich sind, und die daher dem Kreise sowohl ein- als umgeschrieben werden können[6]. Die Winkelsumme dieser regelmäßigen Vielecke ist, wie man sehr leicht erkennt, die gleiche wie bei den unregelmäßigen Vielecken gleicher Ordnung und Art. Es ist also der Wert der Summe aller Winkel, der die Art eines Vieleckes eigentlich bestimmt. Nur wenn diese Summe nicht mehr denselben Wert besitzt, hat sich die Art des Vieleckes geändert, oder — wenn man so sagen will — die Art des Vieleckes wird durch die Zahl, die angibt, wie oft sein Umfang sich durch den ganzen Winkelraum windet, gekennzeichnet. Es kommt dies auf dasselbe hinaus, wie das oben Gesagte, wie man alsbald erkennen wird. So gibt es z. B. zwei Arten von Fünfecken: In allen Fünfecken der ersten Art, unter denen sich die gewöhnlichen Fünfecke befinden, beträgt die Summe aller Winkel sechs Rechte; in allen Fünfecken der zweiten Art, deren Umfang zweimal durch den Winkelraum sich windet, ist die Summe aller Winkel gleich zwei Rechten, wie beim Dreieck.

7. Allgemein gilt der folgende

Satz. In der Ordnung der Vielecke von m Seiten gibt es ebensoviele verschiedene Arten, als es in der Reihe der Zahlen von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ Primzahlen zu m gibt.

Es sei h eine Zahl kleiner als m und Primzahl zu m, und man betrachte m Punkte oder Ecken a, b, c, d, e . . ., die auf der Peripherie eines Kreises in gleichen Abständen von einander angeordnet sind. Wenn man die Punkte, vom ersten Punkte a ausgehend, allmählich durch Gerade in der Weise verbindet, daß man von jedem Punkte stets um h Punkte weitergeht, so muß man, da die Zahl h mit m außer der Ein-

heit keinen Teiler gemeinsam hat, alle m Punkte durchlaufen, ehe man zu dem ersten Punkte zurückkommen kann. Dann aber hat man ein regelmäßiges Vieleck mit m Seiten und m bestimmten Ecken $a, b, c, d, e, \ldots$ erzeugt.

Verfolgt man die Konstruktion des Vielecks in umgekehrter Reihenfolge, so findet man, daß jeder Punkt mit dem $(m-h)$ten folgenden verbunden ist, und daß man also dasselbe Vieleck erhält, gleichgültig, ob man bei der Verbindung der Punkte stets um h oder um $m-h$ Punkte weitergeht.

Ist g eine andere Zahl kleiner als die Zahl m und prim zu ihr, und verbindet man die m Punkte, indem man von jedem Punkte um g Punkte weitergeht, so erhält man ein neues Vieleck von m Seiten. Zu demselben Vieleck gelangt man aber auch, wenn man stets um $m-g$ Punkte weitergeht. Und so fort.

Zunächst kann man also ebensoviele Vielecke von m Seiten konstruieren, als es Primzahlen zu m in der Reihe der Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$ gibt. Da aber dann das durch eine dieser Zahlen bestimmte Vieleck dasselbe ist, wie das durch ihre Ergänzung zu m bestimmte, so folgt, daß es ebensoviele verschiedene regelmäßige m-Ecke als Primzahlen zu m in der Reihe der Zahlen von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ gibt.

Weiter behaupte ich, daß in dem Vielecke, das durch Verbindung jedes Punktes mit seinen h^{ten} folgenden gebildet ist, die Summe der Innenwinkel ebensovielmal zwei Rechte beträgt, als die Zahl $m-2h$ Einheiten hat, also $2R(m-2h)$. Da die Summe aller Winkel, der Innen- und der Außenwinkel, gleich $2R \cdot m$ ist, so hat man mithin nur zu beweisen, daß die Summe der Außenwinkel gleich $2R \cdot 2h$ ist. Nun ist aber ersichtlich, daß sich die gerade Linie, die das Vieleck nochmals bildet, indem sie sich auf seine Seiten aufwickelt, ebensoviele volle Umdrehungen, als die Zahl h Einheiten hat, durch den ganzen Winkelraum ausführen muß, ehe das Vieleck geschlossen ist. Die Summe aller Außenwinkel beträgt daher $4R \cdot h = 2R \cdot 2h$, und folglich die Summe aller Innenwinkel $2R(m-2h)$, w. z. b. w.

Dieser Beweis setzt, wie man sieht, nicht voraus, daß das Vieleck regelmäßig ist, sondern nur, daß es konvex ist. Die Winkelsumme ist also für alle in der gleichen Weise konstruierten konvexen Vielecke gleich groß und hängt nur von

der zu m primen Zahl h ab, die das Vieleck bestimmt und als seine Seite oder Wurzel aufgefaßt werden kann. Diese Winkelsumme ist also verschieden für Vielecke, die durch verschiedene Primzahlen zu m gegeben sind, und alle diese Vielecke sind von verschiedener Art.

8. Bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Primzahlen, die in m als Faktoren enthalten sind, so daß also

$$m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$$

ist, so gibt es bekanntlich ebenso viele Zahlen, die prim zu m und kleiner als m sind, wie die Zahl

$$m\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ldots$$

Einheiten hat. Nimmt man also von dieser Zahl nur die Hälfte, weil jede Zahl dasselbe Vieleck liefert, wie ihre Ergänzung zu m, so erhält man für die Anzahl N der Arten der konvexen Vielecke von m Seiten

$$N = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ldots,$$

oder auch

$$2\,N = \alpha^{p-1} \cdot \beta^{q-1} \cdot \gamma^{r-1} \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) \ldots.$$

9. Ist m eine Primzahl, so wird, wie es sein muß,

$$N = \frac{m-1}{2},$$

da dann alle Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$ zu m prim sind, und es also ebensoviele Vielecke gibt, als die halbe Anzahl dieser Zahlen Einheiten hat.

Es gibt mithin nur ein einziges Dreieck, aber zwei Fünfecke durch Verbindung jedes der fünf Punkte mit dem ersten oder zweiten folgenden Punkte. In dem ersten Fünfeck beträgt die Winkelsumme $2\,R(5 - 2 \times 1) = 6\,R$ und im zweiten $2\,R(5 - 2 \times 2) = 2\,R$, wie beim Dreieck (Fig. 5).

Ebenso erkennt man, daß durch die Zahlen 1, 2, 3 drei Siebenecke bestimmt sind (Fig. 6). Im ersten, dem gewöhnlichen

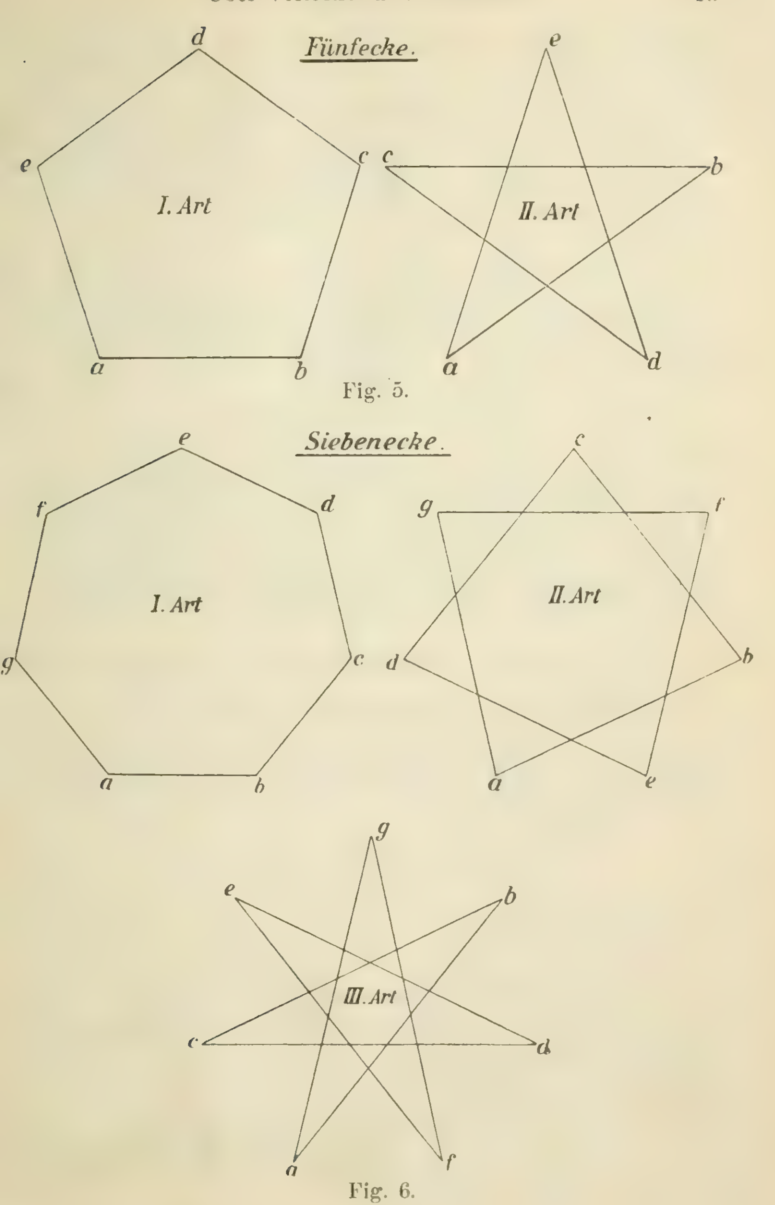

Fünfecke.
d
e
c
I. Art
a
b
e
c
b
II. Art
a
d
Siebenecke.
e
f
d
I. Art
g
c
a
b
c
g
f
II. Art
d
b
a
e
g
e
b
III. Art
c
d
a
f

Fig. 5.

Fig. 6.

Siebeneck, beträgt die Winkelsumme $10\,R$, im zweiten $6\,R$ und im dritten $2\,R$.

In gleicher Weise erhält man fünf Arten von Elfecken, gegeben durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5. Die Winkelsumme ist für die erste Art $18\,R$, für die zweite $14\,R$, für die dritte $10\,R$, für die vierte $6\,R$ und für die letzte $2\,R$, wie für das Dreieck (vgl. Fig. 9 auf S. 18). Und so fort.

10. Ist m ungerade, so ist die Zahl $\frac{m-1}{2}$ stets prim zu m, folglich gibt es Vielecke mit beliebig ungerader Seitenzahl stets eine Art, für die die Winkelsumme gleich

$$2\,R \cdot \left(m - 2 \cdot \frac{m-1}{2}\right) = 2\,R$$

ist.

Was die Vielecke mit gerader Seitenzahl anbelangt, so erkennt man sofort, daß nur eine Art von Vierecken und eine Art von Sechsecken vorhanden ist. Wohl aber gibt es mehrere Arten von Achtecken (Fig. 7), Zehnecken (Fig. 8) usw.; für keine dieser Arten kann die Winkelsumme gleich einem ungeraden Vielfachen von zwei Rechten sein.

11. Ist die Zahl m gerad-gerade oder von höherem Grade der Geradheit, so ist zu beachten, daß die Zahl $\frac{m}{2} - 1$ stets prim zu m ist. Mithin gibt es von Vielecken mit einer gerad-geraden Anzahl von seiten stets eine Art, für die die Winkelsumme gleich

$$2\,R \cdot \left[m - 2\left(\frac{m}{2} - 1\right)\right] = 4\,R,$$

wie beim Viereck, ist.

12. Ist die Zahl m einfach gerade, so ist die Zahl $\frac{m}{2} - 2$ zu ihr prim, und die der letzteren Zahl entsprechende Vielecksart hat als Winkelsumme

$$2\,R \cdot \left[m - 2\left(\frac{m}{2} - 2\right)\right] = 8\,R,$$

wie das Sechseck.

13. In jeder Ordnung von Vielecken mit einer beliebigen ungeraden Seitenzahl, wie

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .,

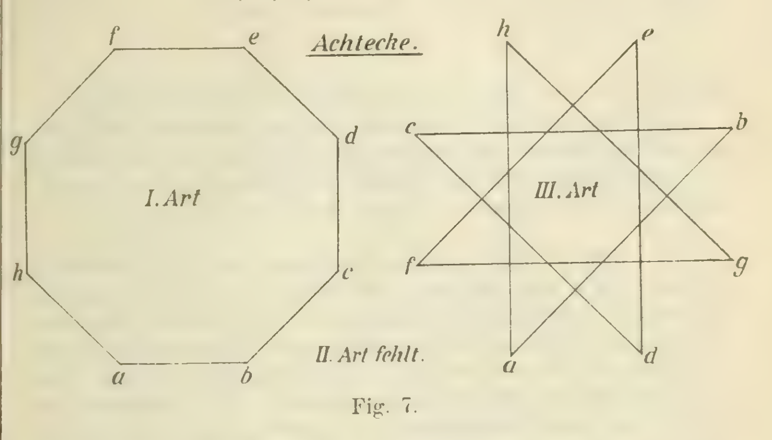


Fig. 7.

gibt es stets eine Art, deren Winkelsumme gleich zwei Rechten ist.

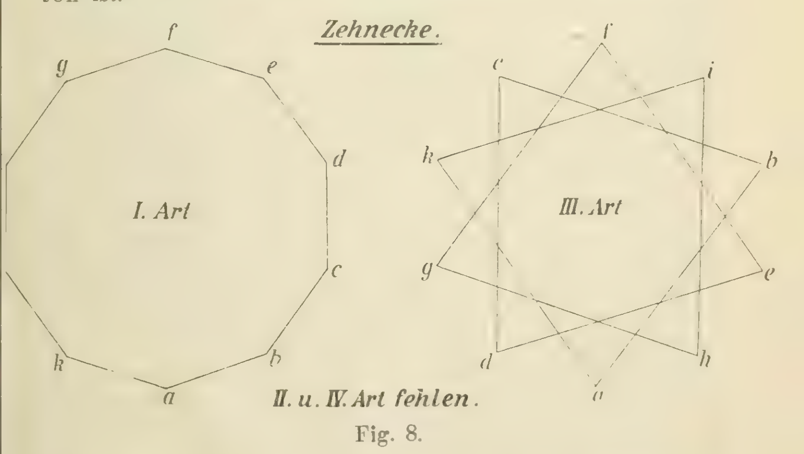


Fig. 8.

In jeder Ordnung von Vielecken mit einer beliebigen gerad-geraden Seitenzahl, wie

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 . . .,

gibt es stets eine Art, deren Winkelsumme gleich vier Rechten ist.

Endlich, in jeder Ordnung von Vielecken mit einer beliebigen einfach geraden Seitenzahl, wie

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, . . .,

gibt es eine Art, deren Winkelsumme gleich acht Rechten ist.

Dies sind für alle Ordnungen konvexer Vielflache die Arten, deren Winkelsumme die kleinste und beziehungsweise die gleiche ist, wie für das Dreieck, Viereck und Sechseck, die drei einzigen Vielecksordnungen mit nur einer Art.

14. Obwohl diese Sätze sehr einfach sind, so erschienen sie uns durch ihre Neuheit und ihren engen Zusammenhang mit andern schwierigen Theorien doch nicht unwert, hier angeführt zu werden. Dies werden die Mathematiker leicht verstehen können, es verdient jedoch, an einem andern Orte noch gründlicher untersucht zu werden [7]. Wir begnügen uns hier, noch einige Erläuterungen zu geben und mehrere neue Betrachtungen hinzuzufügen.

II.

15. Diese höheren Arten von Vielecken, von denen hier die Rede ist, haben die Gestalt eines Sternes; sie besitzen m Seiten und m ganz bestimmte Winkel, und zwar sind es die Winkel, die an den zusammenstoßenden Endpunkten je zweier der m Strecken, deren fortlaufender Linienzug die Figur vollständig schließt, liegen. Die übrigen Winkel, die von zwei nicht benachbarten, sich schneidenden — oder richtiger übereinander hinweggehenden — Seiten gebildet werden, dürfen nicht als Vieleckswinkel mitgezählt werden; ebenso wenig, wie in den gewöhnlichen Vielecken Winkel mitgezählt werden, die von zwei nicht benachbarten, aber bis zu ihrem Schnittpunkte verlängerten Seiten miteinander gebildet werden. Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, besteht zwischen diesen Sternvielecken und den gewöhnlichen Vielecken der Unterschied, daß bei den letzteren eine Seite verlängert werden muß, um von den ebenfalls verlängerten, nicht benachbarten Seiten geschnitten werden zu können, während bei den ersteren die Seiten selbst von nicht benachbarten Seiten wirklich geschnitten werden können. Bei den gewöhnlichen Vielecken teilt eine Seite jede nicht benachbarte Seite in zwei Abschnitte, deren Differenz die Seite selbst ist; bei den Sternvielecken dagegen kann eine Seite eine andere nicht benachbarte Seite so teilen, daß die Summe der beiden Abschnitte gleich der Seite selbst ist, und eine dritte nicht benachbarte Seite so, daß die Differenz, der beiden Abschnitte gleich der Seite ist. Aber alle diese Unterschiede sind mehr scheinbare, als wirkliche und verschwinden vollständig bei der algebraischen Berechnung der Vielecke, bei der die verschiedenen Arten von Vielecken derselben Ordnung sich untrennbar erweisen. In der Tat, will man die Seite eines regelmäßigen Vielecks berechnen, so erhält man eine Gleichung von höherem Grade, deren sämtliche Wurzeln reell sind und gleichzeitig die Seiten aller regelmäßigen Vielecke der gleichen Ordnung liefern. So ist es z. B. unmöglich, die Seite eines einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks zu berechnen, ohne gleichzeitig die Seiten der regelmäßigen Siebenecke zweiter und dritter Art mit zu erhalten. Ist umgekehrt die Seite eines

regelmäßigen Siebenecks gegeben, und man soll den Radius des Kreises berechnen, in den das Siebeneck eingeschrieben werden kann, so erhält man drei verschiedene Kreise, die den drei Arten von Siebenecken, die man über derselben Seite konstruieren kann, entsprechen. Dies rechtfertigt es wohl, daß wir auch die neuen Sternfiguren als *Vielecke* bezeichnen.

Übrigens kann man auch sagen, daß die verschiedenen Arten von Vielecken derselben Ordnung aus dem gewöhnlichen Vielecke durch Verlängerung jeder Zeite bis zum Schnitte mit der zweitfolgenden oder jeder Seite bis zum Schnitte mit der drittfolgenden Seite usw. entstehen (Fig. 9). Diese Umkehrung ist

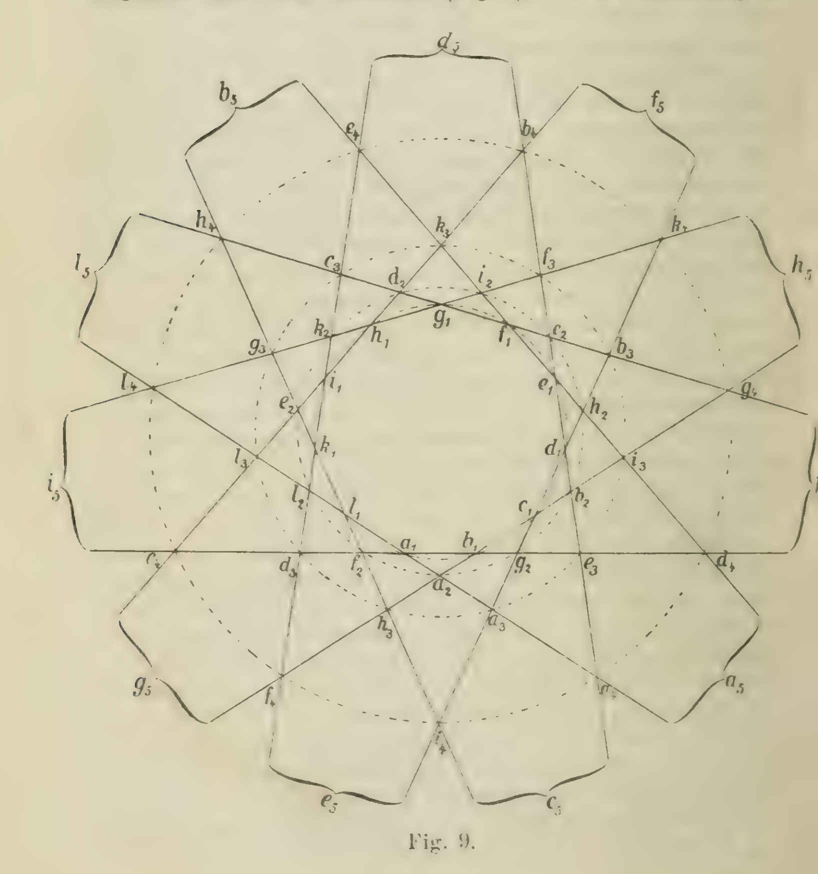


Fig. 9.

aber nicht allgemein richtig, da die Verlängerung der Seite eines gewöhnlichen Vielecks bis zum Schnitte mit der zweitfolgenden, drittfolgenden oder einer späteren Seite nicht stets ein neues Vieleck derselben Ordnung ergibt. Denn verlängert man z. B. bei dem Sechseck jede Seite bis zum Schnittpunkte mit der zweitfolgenden Seite, so entsteht nur scheinbar ein neues Sternsechseck zweiter Art; in Wirklichkeit besteht die entstandene Figur aus zwei über Kreuz liegenden gleichseitigen Dreiecken (Fig. 10) und ist keine einfache, aus einem zusammenhängenden Zuge gerader Linien bestehende Figur. Bei algebraischer Berechnung der regelmäßigen Vielecke entspricht diesem Falle die Zerlegbarkeit der binomischen Gleichung, und der Umstand, daß nicht jede imaginäre Wurzel der Gleichung geeignet ist, durch ihre aufeinanderfolgenden Potenzen die sämtlichen Wurzeln der Gleichung darzustellen. Hierauf werden wir, wie schon bemerkt, an anderer Stelle zurückkommen, da wir die Absicht hatten, diese analytischen Untersuchungen abzutrennen und hier nur eine rein geometrische Abhandlung zu geben, deren Sätze in gleicher Weise für alle regelmäßigen wie unregelmäßigen Vielecke gelten [8]).

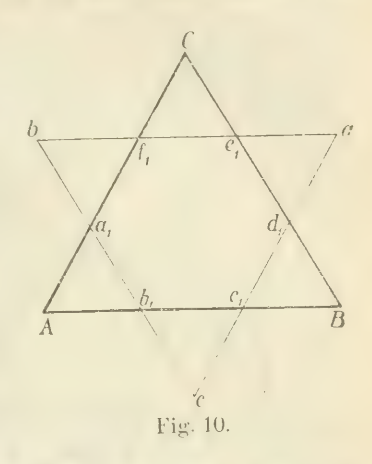


Fig. 10.

16. Betrachtet man die Seiten eines gewöhnlichen Vielecks als Stäbe, die um die Eckpunkte als Gelenke drehbar sind, so kann man sich vorstellen, daß man dieses Vieleck aus einer Art in eine andere überführt, indem man alle seine Seiten sich in seiner Ebene bewegen läßt. So kann man z. B. das gewöhnliche Siebeneck, in dem die Summe der Winkel gleich zehn Rechten ist, in ein Siebeneck zweiter Art, in dem die Summe der Winkel nur noch sechs Rechte beträgt, überführen. Hat man bei dem ersten Siebeneck das innere Ufer des Umrisses weiß und das äußere schwarz gefärbt, so daß seine Winkel zwischen den weißen Ufern liegen, so sind, wie man bemerkt, auch alle Winkel des neuen Siebenecks noch zwischen

denselben Ufern gelegen (Fig. 11). Das Gleiche gilt noch, wenn man dieses neue Siebeneck in ein solches dritter Art überführt, in dem die Summe der Winkel nur zwei Rechte beträgt. Weiter kann man aber bekanntlich nicht gehen; allgemein gibt es keine geradlinige Figur, deren Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist. Wir haben es jedoch nicht für überflüssig

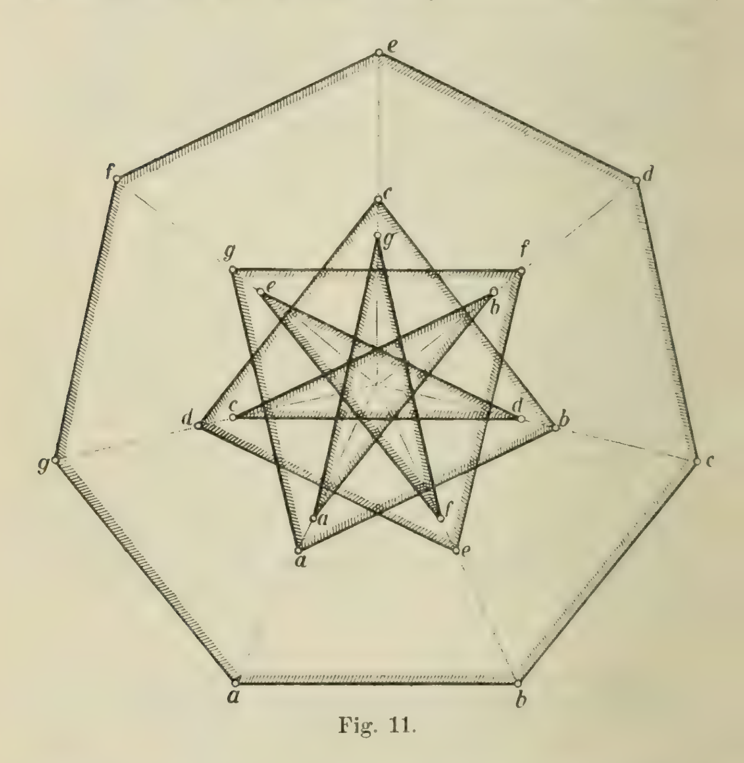


Fig. 11.

gehalten, hervorzuheben, daß bei diesem Übergange einer Art in eine andere, wobei die Figur einmal oder öfter vier rechte Winkel verliert, die Vieleckswinkel stets an denselben Punkten, zwischen denselben Seiten und zwischen den gleichen Ufern dieser Seiten gelegen bleiben.

17. Ist h Primzahl zu m, und verbindet man die m auf der Peripherie eines Kreises gelegenen Punkte $a, b, c, d, e \ldots$

so, daß man, von a ausgehend, von jedem Punkte um h Punkte fortschreitet, so muß man mit Notwendigkeit alle m Punkte berühren, ehe man zum Ausgangspunkte zurückgelangt. Man kann in gleicher Weise die Umkehrung dieses Satzes beweisen, nämlich: Verbindet man die m Punkte a, b, c, d, e . . . so miteinander, daß man von jedem Punkte stets um h Punkte weitergeht, und berührt man hierbei alle m Punkte, ehe man zum Ausgangspunkte zurückkehrt, so muß die Zahl h zu der Zahl m prim sein. Kann man nun das Intervall, in dem man die Punkte verbindet, ganz beliebig wählen, ohne zum Ausgangspunkte früher zurückzukommen, als bis man sämtliche Punkte berührt hat, so ist sicher die Anzahl m aller Punkte eine Primzahl. Dieser Satz liefert eine Art geometrischer Definition einer Primzahl.

Gibt es zwischen h und m einen gemeinsamen Teiler Θ, von dem vorausgesetzt werde, daß er der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen ist, und verbindet man die Punkte, indem man stets von einem Punkte um h Punkte weitergeht, so durchläuft man nicht alle m, sondern nur $\frac{m}{\Theta}$ Punkte.

In der Tat, ist $h = h'\Theta$ und $m = m'\Theta$, wo h' und m' zueinander prim sind, so durchläuft man, wenn man die m Punkte im Intervalle Θ miteinander verbindet, offenbar nur m' aller Punkte. Verbindet man aber die Punkte im Intervalle h' miteinander, so durchläuft man wieder die gleichen Punkte. Dieses letzte Verfahren kommt aber darauf hinaus, die gegebenen Punkte im Intervalle $h\Theta = h$ zu verbinden. Also durchläuft man nur $m' = \frac{m}{\Theta}$ Punkte. Verbindet man z. B. 18 Punkte im Intervalle 4 miteinander, so durchläuft man nur 9 dieser Punkte (Fig. 12).

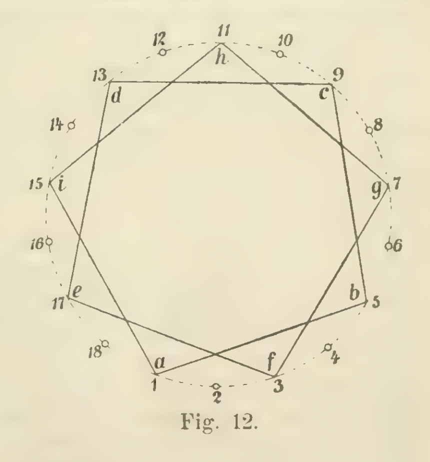


Fig. 12.

18. Bei dieser Gelegenheit glauben wir, die Lösung einer Aufgabe mitteilen zu sollen, die in der Mechanik von Nutzen sein dürfte. Es handelt sich darum, einen biegsamen Faden zwischen m im Raume beliebig gelegenen Punkten so zu spannen, daß er jeden Punkt mit jedem andern Punkte verbindet, und daß schließlich sein Ende mit dem Anfange in denselben Punkt vereinigt zu liegen kommt; die Gesamtlänge des Fadens muß also gleich der Summe der gegenseitigen Abstände aller Punkte sein. Die Lösung der Aufgabe ist, wie wir sofort zeigen werden, nur möglich, wenn die Zahl der Punkte ungerade ist. Bei einer geraden Anzahl von Punkten kann man zwar einen Faden noch so spannen, daß er jeden Punkt mit jedem andern Punkte verbindet, aber man muß ihn von jedem Punkte zu jedem andern doppelt führen: sind dann beide Fadenenden vereinigt und der Faden geschlossen, so ist seine Gesamtlänge gleich der doppelten Summe der gegenseitigen Abstände aller Punkte.

19. Des leichteren Verständnisses wegen denken wir uns alle Punkte auf eine Ebene projiziert. Die Anzahl der gegenseitigen Entfernungen der Projektionen ist dann offenbar dieselbe wie die der Raumpunkte, und die Reihenfolge, in der man die Projektionen paarweise miteinander verbinden kann, gibt zugleich die Reihenfolge, die bei der Verbindung der Raumpunkte selbst einzuhalten ist.

Die Anzahl der Punkte sei zunächst eine Primzahl, und zwischen den Punkten werde eine gewisse Reihenfolge a, b, c, d, e, . . . festgesetzt, so daß a der erste, b der zweite, c der dritte Punkt usw. ist. Da m eine Primzahl ist, so sind alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, . . ., $\frac{m-1}{2}$ prim zu m. Wenn man also, von a z. B. ausgehend, jeden Punkt mit dem nächstfolgenden verbindet, so berührt man, ehe man nach a zurückkommt, alle Punkte und durchmißt so die m gegenseitigen Abstände ab, bc, cd, de, ... Geht man dann bei der Verbindung der Punkte von jedem Punkte um 2 Punkte weiter, so durchmißt man m neue gegenseitige Abstände ac, ce, . . ., ehe man nach dem Punkte a zurückkehrt. Fährt man in dieser Weise fort, indem man von jedem Punkte um 3, 4, . . . $\frac{m-1}{2}$ Punkte weitergeht, so erhält man $\frac{m(m-1)}{2}$

verschiedene Geraden, die die sämtlichen gegenseitigen Verbindungen der gegebenen Punkte sind. Und da zugleich die beiden Fadenenden im Ausgangspunkte zusammentreffen, so ist die Aufgabe gelöst.

20. Ist m eine zusammengesetzte ungerade Zahl, so versagt die eben gegebene Konstruktion; aber man kann sie in geeigneter Weise abändern.

Zunächst ist klar, daß, wie im vorhergehenden Falle, es m Geraden gibt, die von jedem Punkte um einen Punkt weiterführen; m andere Geraden, die von jedem Punkt um 2 Punkte weiterführen; m weitere Geraden, die von jedem Punkt um drei Punkte weiterführen, und so fort, schließlich m Geraden, die von jedem Punkte um $\frac{m-1}{2}$ Punkte weiterführen. Diese Geraden liefern alle möglichen gegenseitigen Abstände, und es handelt sich nur darum, sie in einem zusammenhängenden Zuge zu beschreiben. Alle Geraden, die von einem Punkte zu einem andern um gleiche und zu m prime Intervallzahlen weiterführen, kann man ebensoleicht in einem zusammenhängenden Zuge durchlaufen, wie im vorigen Falle. Die Geraden jedoch, die zu m kommensurablen Intervallzahlen entsprechen, kann man unmöglich in einem zusammenhängenden Zuge beschreiben, ohne andere Geraden zu Hilfe zu nehmen. Denn ist g eine Zahl, die mit m den größten gemeinsamen Teiler ω besitzt, so würde man, wenn man die Punkte in der Weise verbindet, daß man stets von einem Punkte um g Punkte weitergeht, nur $\frac{m}{\omega}$ aller Punkte berühren und mithin auf diese Weise nur $\frac{m}{\omega}$ der dem Intervalle g entsprechenden Abstände erhalten. Um weitere $\frac{m}{\omega}$ dieser Abstände zu erhalten, müßte man auf einer neuen Geraden, die zu einem andern Intervall gehört, zu einem andern Punkte übergehen und von ihm als Ausgangspunkte im Intervalle g fortschreiten; und so fort.

Um aber alle gegenseitigen Abstände der verschiedenen Punkte in einem zusammenhängenden Zuge zu beschreiben, geben wir ein neues Verfahren, das für eine ungerade Zahl, sei sie Primzahl oder zusammengesetzte Zahl, stets anwendbar ist und eine vollkommen symmetrische Konstruktion liefert.

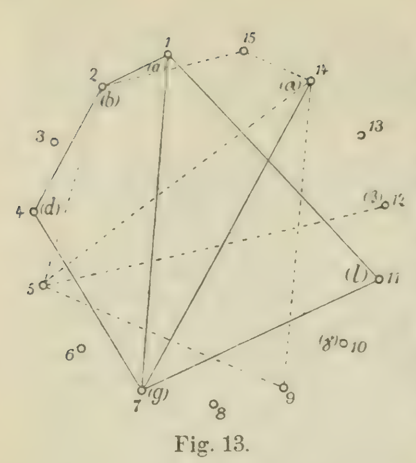


Fig. 13.

Vom Punkte a z. B. (Fig. 13) geht man zum zweiten Punkte b, von diesem zum vierten Punkte d, von diesem zum siebenten Punkte g, und so fort, indem man Intervalle durchläuft, die wie die Glieder der arithmetischen Reihe 1, 2, 3, 4, . . ., $\frac{m-1}{2}$ wachsen. Offenbar hat man hierbei einen der m Abstände des Intervalles 1, nämlich ab, einen der m Abstände des Intervalles 2, nämlich bd, einen der m Abstände des Intervalles 3, nämlich dg, und so fort, schließlich einen der m Abstände des Intervalles $\frac{m-1}{2}$ durchlaufen. Am Ende ist man dann, wie ich behaupte, in einem Punkte α des Systems angelangt, der vom Ausgangspunkte a, um ein zu m primes Intervall p entfernt ist. Denn man befindet sich in einem Abstande von a, der durch die Summe

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{m-1}{2} = \frac{m^2-1}{8}$$

oder vielmehr durch den kleinsten Rest p dieser Zahl in bezug auf m bezeichnet ist. Nun ist aber $m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$ augenscheinlich prim zu m, und um so mehr ist es $\frac{m^2-1}{8}$. Folglich ist der Rest p prim zu m.

Man kann nun aber zunächst vom Punkte α, in dem man sich jetzt befindet, ausgehend, dieselbe Konstruktion, die man vorhin von a ab ausführte, wiederholen. Da die Punkte, die man dabei berührt, sämtlich um das gleiche Intervall p gegen die entsprechenden Punkte der ersten Konstruktion vorgerückt sind, so kehrt man sicher nicht in bereits berührte Punkte zurück und beschreibt nicht bereits durchlaufene gegenseitige Abstände. Folglich durchläuft man $\frac{m-1}{2}$ neue Abstände und gelangt

zu einem Punkte β, der von α ebensoweit entfernt ist, wie dieser von a; und so fort.

Das Intervall p der Punkte α, β, γ, ... ist aber prim zu m; folglich muß man im ganzen m der ersten gleiche Konstruktionen ausführen, ehe der Punkt, in dem man am Ende jeder einzelnen Konstruktion anlangt, wieder — nachdem er alle andern Punkte durchlaufen hat — mit dem Ausgangspunkte a der ersten Konstruktion zusammenfällt. Man hat also in zusammenhängender und in sich zurücklaufender Bewegung alle $\frac{m(m-1)}{2}$ Verbindungsgeraden der verschiedenen Punkte durchlaufen, und zwar eine jede nur einmal, genau wie verlangt war[9]).

21. Ist die Zahl der Punkte gerade, so erkennt man leicht, daß alles soeben Gesagte nicht mehr zutrifft, und man kann sogar von vornherein zeigen, daß die Aufgabe unmöglich ist. Denn wenn ein geschlossener Faden wirklich auf alle möglichen Arten zwischen einer geraden Anzahl von Punkten gespannt wäre, so würde in jedem Punkte eine ungerade Anzahl von Teilen dieses Fadens zusammenlaufen. Da alle diese Teile aber demselben Faden zugehören, so würde der eine Teil die Verlängerung eines zweiten, ein dritter Teil die Verlängerung eines vierten Teiles sein usw. Nur der letzte Teil würde allein übrig bleiben und nicht die Verlängerung eines andern Teiles sein können. In jedem Punkte würde mithin der Faden ein Ende und, wenn $2m$ die Anzahl aller Punkte ist, im ganzen wenigstens $2m$ Enden besitzen. Folglich würden wenigstens m verschiedene und nicht geschlossene Fäden vorhanden sein, was gegen die Annahme verstößt.

22. Man kann aber leicht erkennen — ohne daß wir uns jedoch damit aufhalten wollen, es zu beweisen —, daß man bei einer geraden Anzahl von Punkten auf mehrere Arten alle gegenseitigen Verbindungslinien mit Ausnahme der m Geraden, die die $2m$ Punkte im Intervalle m verbinden, in einem zusammenhängenden Zuge durchlaufen kann. Gestattet man aber, daß diese letzteren Geraden doppelt durchlaufen werden, so kann man alle in einem zusammenhängenden Zuge beschreiben. Will man also zwischen allen Punkten eine gleichmäßige Fadenverbindung herstellen, so braucht man den Faden nur noch

einmal über alle übrigen gegenseitigen Abstände zu führen, und man hat dann einen geschlossenen Faden, der die 2 m Punkte auf alle möglichen Arten miteinander paarweise verbindet, indem er längs jeder Verbindungslinie doppelt läuft. Die Gesamtlänge des Fadens ist also gleich der doppelten Summe aller gegenseitigen Abstände der 2 m Punkte.

23. Übrigens läßt sich die Möglichkeit, einen Faden zwischen einer geraden Anzahl von Punkten doppelt zu führen, auch von vornherein beweisen, d. h. beweisen, ohne daß man die Art und Weise kennt, nach der es auszuführen ist, und zwar mit Hilfe einer eigentümlichen, der in Nr. 21 angestellten ähnlichen Überlegung, die man leicht auffinden kann. Wir bemerken nur, daß der in der angeführten Nummer gegebene Beweis auch die Lösung einer kleinen topologischen Aufgabe gibt, von der vor einigen Jahren viel die Rede war. Man verlangte nämlich die vier Seiten eines Vierecks und seine beiden Diagonalen in einem einfachen und zusammenhängenden Zuge zu zeichnen. Man erkennt, daß dies unausführbar ist. Denn da in jedem Eckpunkte drei Linien zusammentreffen, so würde die eine notwendigerweise die Fortsetzung einer andern sein; für die dritte aber müßte der Griffel in diesem Punkte angehalten oder abgesetzt werden. Für den Griffel würden also wenigstens vier Haltepunkte vorhanden sein, und die Figur kann also in nicht weniger als zwei Zügen beschrieben werden.

Ebenso ist es unmöglich, in einem einzigen (nicht geschlossenen) Zuge die gegenseitigen Verbindungslinien mehrerer Punkte oder einen Teil dieser Linien zu beschreiben, wenn mehr als zwei Punkte vorhanden sind, in denen eine ungerade Anzahl von Linien zusammentrifft. Soll aber die Figur in einem Zuge, der auch noch in sich zurückkehrt, durchlaufen werden, so darf sie keinen Punkt enthalten, in dem eine ungerade Anzahl von Linien zusammentreffen.

Man kann also die zwölf Kanten des Würfels nicht in weniger als vier getrennten Zügen beschreiben; in einem einzigen und sogar in sich zurücklaufenden Zuge aber kann man die zwölf Kanten und die vier Diagonalen des Würfels beschreiben. Im Gegensatze dazu kann man in einem einzigen geschlossenen Zuge die zwölf Kanten des Achtflachs beschreiben, und man kann dies nicht mehr, wenn man noch seine drei Diagonalen hinzunimmt: usw.[10])

24. Um von dem eben Gesagten eine Anwendung auf die verschiedenen Arten von Vielecken zu machen, wollen wir mehrere Punkte betrachten, die durch denselben geschlossenen Faden paarweise miteinander verbunden sind, und die längs dieses Fadens frei gleiten können. Nehmen wir z. B. an, daß fünf Punkte gegeben sind, und daß der Faden, der durch sie, gleichsam wie durch Ringe, hindurchgeht, ein einfaches Seilfünfeck bildet. Greifen an diesen Punkten fünf gleich große Kräfte an, deren Richtungen die Ebene in fünf gleiche Teile teilen, so bildet der Faden offenbar ein regelmäßiges Fünfeck, und es möchte scheinen, als könnte seine Spannung nur einen einzigen bestimmten Wert haben. Jedoch kann der Faden

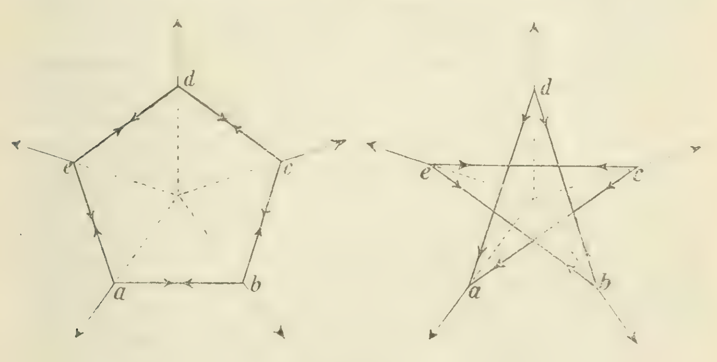


Fig. 14.

unterschiedslos entweder ein regelmäßiges Fünfeck der ersten oder ein solches der zweiten Art bilden (Fig. 14); in dem letzteren Falle ist die Spannung nicht die gleiche wie im ersteren, sondern sie steht zu dieser im Verhältnis von $sec\,\frac{1}{5}R$ zu $sec\,\frac{3}{5}R$, wie man leicht erkennen kann. Derselbe Faden kann also auf zwei verschiedene Arten benutzt werden, um der Wirkung derselben, in dem gleichen Sinne und längs der gleichen Geraden wirkenden Kräfte Widerstand zu leisten. Wenn nun die Widerstandsfähigkeit des Fadens nicht groß genug ist, um der Wirkung der Kräfte zu widerstehen, wenn der Faden ein gewöhnliches Fünfeck bildet, so kann dies sehr wohl der Fall sein, wenn er in der Gestalt eines Fünfecks der zweiten Art gespannt ist, und der Faden wird dann in dem letzteren Falle nicht zerreißen.

Ebenso findet man, daß die Spannung ein und desselben Fadens, der in ähnlicher Weise eine beliebige andere Zahl von Punkten verknüpft, verschiedene Werte haben kann. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn die Anzahl der Punkte 3, 4 oder 6 beträgt; in diesen Fällen kann der Faden nur eine einzige regelmäßige Figur bilden.

25. Wenn ein Faden auf alle möglichen Arten eine Anzahl von Punkten verbindet, so kann er nur in einer einzigen Weise von denselben Kräften gespannt werden. Die Spannungen in den einzelnen Teilen dieses Fadens sind aber noch dieselben, wie bei den einfachen Seilvielecken. Dies bietet uns eine weitere wichtige Bemerkung dar zu der überaus heiklen Theorie der Wechselwirkungen zwischen den Punkten eines völlig im Gleichgewichte befindlichen Systems. Man kennt genau das Verhältnis der Gesamtkräfte P, Q, R, S, . . ., die auf die einzelnen Punkte a, b, c, d, . . ., wirken müssen, aber man weiß nicht, in welcher Weise hierbei sich diese Kräfte wirklich in paarweise einander gleiche und entgegengesetzt gerichtete Komponenten zerlegen, um das innere Gleichgewicht dieses Systems herzustellen. Wir werden in einer späteren Abhandlung das Gesetz mitteilen, das die in Betracht kommenden Spannungen zum Ausdruck bringt. Das oben besprochene System von Ringen, die durch einen einzigen Faden vereinigt sind, wird uns als Beispiel dienen, um diese neue Theorie, die in der Lehre vom Gleichgewicht noch nötig ist, zu bestätigen[11]).

Jetzt wenden wir uns aber zu den Vielecken zurück und wollen noch wenige Worte über ihre Benutzung zur Konstruktion von neuen regelmäßigen Vielflachen sagen.

III.

26. Bis jetzt kennt man nur fünf vollkommen regelmäßige Körper, d. h. Körper, deren Begrenzung von lauter kongruenten, regelmäßigen Vielecken, die gegen einander gleich geneigt sind und in derselben Anzahl an jeder Ecke zusammenstoßen, gebildet wird.

Gemäß den gegebenen Bedingungen ist es in der Tat unmöglich, eine größere Zahl von regelmäßigen Vielflachen zu konstruieren, und die Mathematiker des Altertums haben sie bereits vollständig aufgezählt. Zunächst braucht man zur Bildung einer körperlichen Ecke wenigstens drei ebene Winkel; ferner verlangt man, daß die Summe aller Winkel, die eine körperliche Ecke bilden, kleiner als vier Rechte bleibt. Hieraus folgt aber, daß man gleichseitige Dreiecke nur auf dreierlie Art verwenden kann, indem man drei, vier oder fünf Dreiecke zur Bildung einer jeden Ecke verwendet; dies liefert das regelmäßige Vierflach (Tetraeder), Achtflach (Oktaeder) und Zwanzigflach (Ikosaeder). Quadrate kann man nur auf eine Art zur Konstruktion von Ecken benutzen und erhält dadurch den Würfel (Hexaeder); ebenso können Fünfecke nur auf eine Art, die das regelmäßige Zwölfflach (Dodekaeder) liefert, verwendet werden. Weiter kann man nicht gehen, denn drei Winkel des Sechsecks betragen zusammen bereits vier Rechte, drei Winkel des Siebenecks noch mehr, usw.

27. Wir bemerken jedoch, daß von den beiden obigen Bedingungen nur die erste unbedingt notwendig ist, während die andere sich im allgemeinen nur auf die sogenannte Konvexität bezieht. Wir sagen: im allgemeinen; denn die Bedingung, daß die Summe der an jeder Ecke liegenden ebenen Winkel kleiner

als vier Rechte ist, hat nicht immer die Konvexität der Fläche zur Folge, d. h. die Eigenschaft, daß die Fläche von jeder beliebigen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Diese Eigenschaft nimmt man aber stillschweigend als dritte Bedingung noch hinzu, so daß nur die oben angeführten fünf Möglichkeiten, die die bekannten fünf regelmäßigen Körper ergeben, übrig bleiben.

28. Behält man aber die allgemeine Definition regelmäßiger Körper im Auge, und dehnt man die Definition der Konvexität in geeigneter Weise aus, so erkennt man die Möglichkeit, neue regelmäßige Körper zu konstruieren, und zwar nicht nur mit Hilfe der von uns betrachteten Vielecke, sondern sogar mit den gewöhnlichen regelmäßigen Vielecken. Um dies aber richtig zu verstehen, ist es zunächst nötig, genau anzugeben, was unter den Seitenflächen oder Flächen, Kanten und Ecken eines Vielflachs zu verstehen ist.

Da ein und dasselbe Vielflach sowohl von Vielecken einer Ordnung, als solchen einer andern begrenzt erscheinen kann, so wollen wir als Flächen die Ebenen nehmen, die in geringster Zahl das Vielflach vollständig begrenzen. So gibt es z. B. ein Vielflach, das auf den ersten Blick von sechzig verschiedenen, gegeneinander geneigten Dreiecken begrenzt erscheint, das aber, genauer betrachtet, von zwölf Fünfecken gebildet, also im Grunde genommen nur ein einfaches Zwölfflach ist.

Kanten sind Seiten, die die Flächen eines Körpers begrenzen, und an denen die Flächen paarweise so zusammenstoßen, daß jede Kante für beide Flächen Seite ist. Folglich ist die Zahl der Kanten gleich der halben Anzahl der Seiten aller Flächen.

Nur an diesen Geraden, als Scheitelgeraden, liegen Flächenwinkel des Körpers; zu ihnen darf man alle andern Winkel, die von Flächen an Durchdringungslinien gebildet werden, nicht zählen. Ebenso liegen nur an den Punkten, wo Kanten mit ihren Endpunkten zusammenstoßen, Scheitel oder körperliche Ecken des Vielflachs.

29. Nunmehr behaupten wir, daß man neue, vollkommen regelmäßige Körper, von denen — wie man sehen wird — mehrere wirklich existieren, konstruieren kann. Diese Körper haben lauter kongruente und regelmäßige Flächen, die gegen-

einander gleich geneigt und in derselben Anzahl an jeder Ecke angeordnet sind, und können einer Kugel sowohl eingeschrieben als umgeschrieben werden[12]. Und obgleich diese Körper von außen Höhlungen und Vorsprünge aufweisen, so sind sie konvex in Übereinstimmung mit der allgemeinen Definition, daß alle Flächenwinkel kleiner als zwei Rechte sind. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Körpern und den gewöhnlichen Vielflachen besteht darin, daß bei den letzteren die sphärischen Vielecke, in die sich die Seitenflächen auf die eingeschriebene oder umgeschriebene Kugel projizieren, die Kugeloberfläche nur einmal bedecken, während bei den ersteren diese Vielecke die Kugel zweimal oder dreimal oder öfter und zwar gleichmäßig überdecken, so daß die Oberfläche überall entweder doppelt oder dreifach usw. bedeckt ist.

Man kann daher mehrere Arten konvexer Körper unterscheiden, je nachdem die Projektion ihrer Oberfläche auf die eingeschriebene Kugel, diese mehr oder weniger oft genau bedeckt. Ebenso kann man mehrere Arten körperlicher Ecken betrachten, je nach der Art der Vielecke, die sich durch den Schnitt ihrer Seitenflächen mit einer beliebigen Ebene ergeben. Betrachtet man z. B. eine regelmäßige Pyramide, die ein Fünfeck zweiter Art zur Grundfläche hat, so ist die körperliche Ecke an der Spitze eine solche zweiter Art; projiziert man die ebenen Winkel, die die Spitze bilden, auf die Grundfläche der Pyramiden, so ist die Summe ihrer Projektionen gleich zweimal vier Rechten. Die Oberfläche einer solchen Ecke zweiter Art kann von einer beliebigen Geraden offenbar in nicht mehr als vier Punkten und ebenso die Oberfläche einer körperlichen Ecke dritter Art von einer beliebigen Geraden in nicht mehr als sechs Punkten geschnitten werden, und so fort für die Ecken höherer Art.

Zu beachten ist aber, daß die Art der körperlichen Ecken nicht mit der Art des Vielflaches übereinstimmt, mit Ausnahme der gewöhnlichen Vielflache. So z. B. hat ein Vielflach nur körperliche Ecken zweiter Art und bedeckt siebenmal die eingeschriebene Kugel, so daß seine Oberfläche von einer Geraden in vierzehn Punkten geschnitten werden kann.

30. Will man nun die verschiedenen regelmäßigen Vielflache, die man konstruieren kann, wirklich auffinden, so braucht man nur die verschiedenen Arten zu ermitteln, auf die man eine Kugel ein- oder mehrfach mit kongruenten

regelmäßigen sphärischen Vielecken so überdecken kann, daß ihre Winkel in gleicher Anzahl um jeden Eckpunkt angeordnet sind. Jeder solchen Konstruktion entspricht offenbar ein regelmäßiges Vielflach, und auf Grund der obigen Definition dieser Körper kann es keine andern geben. Begrenzt werden diese Vielflache von allen kongruenten, regelmäßigen ebenen Vielecken, die man erhält, wenn man die Sehnen der Bogen größter Kreise zieht, die die Seiten der sphärischen Dreiecke bilden; die Art ihrer körperlichen Ecken ist durch die Zahl bezeichnet, die angibt, wie oft die an einem beliebigen Eckpunkte liegenden Winkel dieser sphärischen Vielecke zusammen vier rechte Winkel auf der Kugel betragen.

31. Bezeichnet n die Seitenzahl der gewöhnlichen sphärischen Vielecke, die man anwenden will, und α einen ihrer Winkel, so hat die Oberfläche des Vielecks den Inhalt

$$n\alpha - 2n + 4,$$

wenn man den Inhalt der Oberfläche eines Kugeloktanten gleich 1, den der ganzen Kugeloberfläche gleich 8 setzt[13].

Ist F die Anzahl der Vielecke oder der Flächen des Vielflachs und A die Häufigkeit der Überdeckung der Kugel, so besteht die Beziehung

$$F(n\alpha - 2n + 4) = A \cdot 8$$

Gibt ferner q die Anzahl der Winkel α an, die um einen Punkt auf der Kugel vereinigt liegen, und beträgt die Summe dieser Winkel a mal vier Rechte, so daß also a die Art der körperlichen Ecken des Vielflaches bezeichnet, so hat man noch

$$q \cdot \alpha = a \cdot 4,$$

woraus

$$\alpha = \frac{a \cdot 4}{q}$$

folgt. Setzt man nun diesen Wert für α in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$F\left(\frac{n \cdot a \cdot 4}{q} - 2n + 4\right) = A \cdot 8.$$

Diese Gleichung mit den fünf Unbestimmten F, n, q, a, A umfaßt alle regelmäßigen Vielflache, die man aus gewöhnlichen regelmäßigen Vielecken konstruieren kann.

32. Um die verschiedenen Lösungen dieser Gleichung allmählich zu finden, beachte man zunächst, daß die Zahlen F, n, q, a, A ihrer Bedeutung nach ganze und positive Zahlen sind, daß n und q nicht kleiner als 3 sein können, und daß a eine der zu q primen Zahl der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ sein muß. Dies genügt aber nicht zur Bestimmung der wirklich existierenden regelmäßigen Vielflache, ausgenommen der gewöhnlichen Vielflache erster Art, für die bekanntlich gleichzeitig

$$a = 1 \text{ und } A = 1$$

sein muß. Denn dann wird die obige Gleichung

$$F\left(\frac{n \cdot 4}{q} - 2n + 4\right) = 8$$

und ergibt zunächst für Dreiecke oder $n = 3$

$$F\left(\frac{12}{q} - 2\right) = 8.$$

Nimmt man an, daß man diese Dreiecke zu je dreien vereinigt, d. h. setzt man $q = 3$, so erhält man

$$F = 4,$$

was das Tetraeder liefert.

Vereinigt man die Dreiecke zu je vieren, d. h. setzt man $q = 4$, so findet man

$$F = 8,$$

was das Oktaeder liefert.

Vereinigt man die Dreiecke zu je fünfen, d. h. setzt man $q = 5$, so findet man

$$F = 20,$$

was das Ikosaeder liefert.

Für $q = 6$ wird F unendlich und für $q > 6$ negativ, welche Werte unzulässig sind.

Für Quadrate oder $n = 4$ lautet die Gleichung

$$F\left(\frac{16}{q} - 4\right) = 8.$$

Vereinigt man an jeder Ecke je drei Winkel, nimmt man also $q = 3$, so findet man

$$F = 6,$$

was den Würfel oder das Hexaeder liefert.

F wird für $q = 4$ unendlich und für $q > 4$ negativ.

Für Fünfecke oder $n = 5$ liefert die Gleichung

$$F\left(\frac{20}{q} - 6\right) = 8.$$

Wenn man an jeder Ecke drei Winkel vereinigt, also $q = 3$ annimmt, so findet man

$$F = 12,$$

was das Dodekaeder ergibt.

Für $q > 3$ wird F negativ.

Für Sechsecke oder $n = 6$ wird F unendlich, wenn man $q = 3$ annimmt, und negativ, wenn $q > 3$ ist.

Für Vielecke von mehr als sechs Seiten erhält man stets negative Werte für F. Es sind also von konvexen Körpern erster Art nur die bekannten fünf regelmäßigen Körper möglich, und es ist leicht noch zu beweisen, daß sie wirklich existieren.

33. Was die Vielflache höherer Arten anbetrifft, so kann man zwar in gleicher Weise die möglichen aufzählen, ihre

Existenz aber bleibt ungewiß; wir haben die letztere nur in einer kleinen Zahl von Fällen feststellen können.

Fassen wir zunächst Dreiecke ins Auge: Man kann sie nur auf eine Weise zu je dreien oder zu je vieren anordnen, da Dreiecke und Vierecke nur in einer einzigen Art vorhanden sind: dies liefert, wie wir gesehen haben, das Tetraeder und Oktaeder. Da es aber zwei Arten von Fünfecken gibt, so kann man Dreiecke zu je fünfen auf zwei verschiedene Arten zusammenlegen; entweder nämlich so, daß ihre fünf Grundlinien ein regelmäßiges Fünfeck der ersten Art bilden, was das gewöhnliche Ikosaeder ergibt, oder so, daß sie ein regelmäßiges Fünfeck der zweiten Art bilden, was zu einem neuen Vielflach führen kann.

Um die Anzahl der Seitenflächen dieses regelmäßigen Körpers zu finden, setzen wir in der allgemeinen Gleichung (Nr. 31) $n = 3$, $q = 5$, $a = 2$ und erhalten

$$F\left(\frac{24}{5} - 6 + 4\right) = A \cdot 8$$

oder

$$F = \frac{A \cdot 4 \cdot 5}{7}.$$

Die kleinsten Werte von F und A, die dieser Gleichung genügen, sind 20 und 7. Das Vielflach würde also zwanzig dreieckige Flächen haben und die eingeschriebene Kugel siebenmal überdecken.

Dieses neue Ikosaeder existiert aber auch tatsächlich. Es besitzt zwölf fünfseitige körperliche Ecken der zweiten Art und dreißig Kanten; es bedeckt die eingeschriebene Kugel genau siebenmal, und folglich kann seine Oberfläche von keiner Geraden in mehr als vierzehn Punkten geschnitten werden. Alles dies kann man leicht mit Hilfe eines gewöhnlichen Ikosaeders erkennen. Zieht man zwischen den zwölf Ecken eines solchen (Fig. 15), die dreißig Geraden, die nach den die Kanten des gewöhnlichen Ikosaeders bildenden Geraden die

kürzesten Verbindungslinien sind, so bestimmen diese zwanzig gleichseitige und gegeneinander gleich geneigte Dreiecke, die

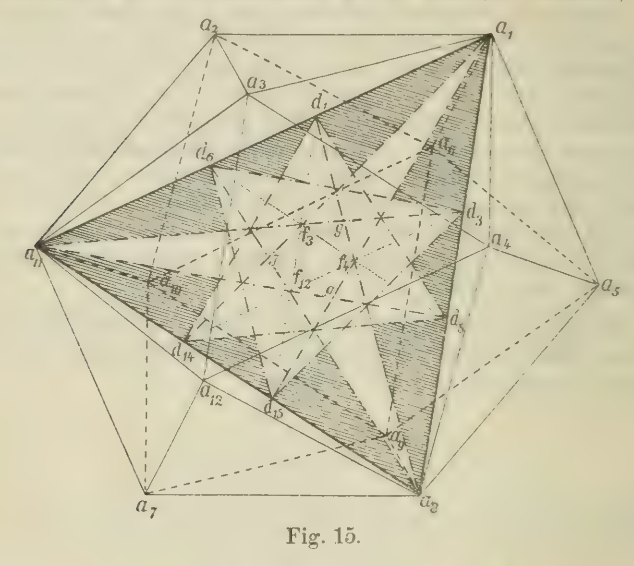


Fig. 15.

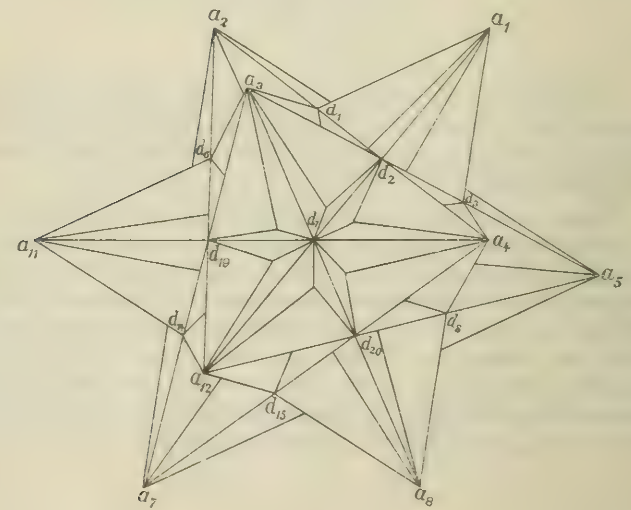


Fig. 16.

an zwölf Scheitelpunkten zwölf fünfseitige körperliche Ecken zweiter Art bilden. Diese zwanzig dreieckigen Seitenflächen begrenzen vollständig das neue regelmäßige Ikosaeder (Fig. 16 und Taf. I), um das es sich handelt[14]).

34. Da es nur eine Art von Sechsecken gibt, so kann man je sechs Dreiecke nur auf eine einzige Art zusammenlegen. Für diesen Fall aber hatten wir gefunden, daß die Zahl der Seitenflächen unendlich groß ist.

35. Noch weniger kann man, wie gezeigt ist, versuchen, siebenseitige körperliche Ecken erster Art zu konstruieren; nichts steht aber im Wege, solche zweiter und dritter Art zu bilden.

Setzt man also in der allgemeinen Gleichung (Nr. 31) zuerst $a = 2$, $q = 7$ und wieder $n = 3$, so erhält man

$$F = \frac{A \cdot 4 \cdot 7}{5},$$

folglich

$$F = p \cdot 28, \quad A = p \cdot 5,$$

wo p eine unbekannte Zahl bezeichnet. Wenn also dieses Vielflach wirklich existiert, so ist die Anzahl seiner Seitenflächen ein Vielfaches von 28, und die Häufigkeit der Überdeckung der Kugel ist das gleiche Vielfache von 5.

Wenn man dann weiter $a = 3$, $q = 7$ und $n = 3$ setzt, so wird

$$F = \frac{A \cdot 4 \cdot 7}{11},$$

folglich ist

$$F = p' \cdot 28, \quad A = p' \cdot 11,$$

wo p' ebenfalls eine unbekannte Zahl bezeichnet. Die Zahl der Flächen würde also auch ein Vielfaches von 28, und zwar wahrscheinlich dasselbe Vielfache wie im vorigen Falle sein; die Anzahl der Überdeckungen der Kugel oder die Art des Vielflachs würde das gleiche Vielfache von 11 sein.

36. In gleicher Weise kann man die weiteren regelmäßigen Vielflache mit dreieckigen Seitenflächen, deren körperliche Ecken achtseitig usw. sind, untersuchen.

Dann wird man allmählich zur Untersuchung der Vielflache

übergehen, die aus Quadraten, Fünfecken usw. konstruiert werden könnten. Wir wollen uns aber nur bei den Fünfecken aufhalten, weil sich aus ihnen ein neues, vollkommen regelmäßiges Dodekaeder, das wirklich existiert, bilden läßt.

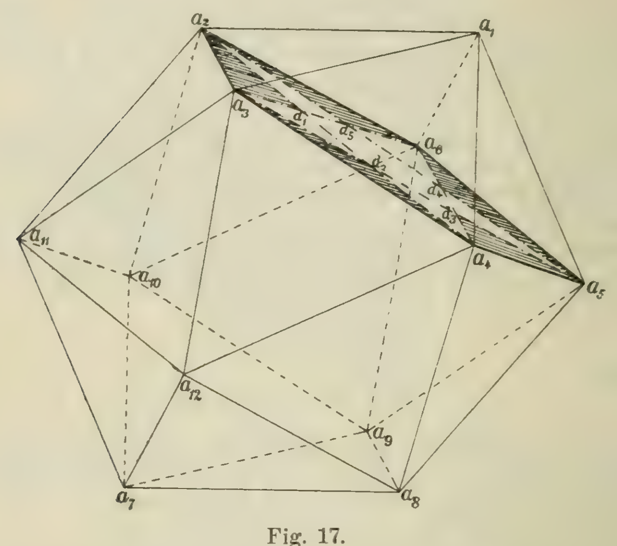


Fig. 17.

37. Setzt man als $n = 5$, $q = 5$, $a = 2$, so ergibt die allgemeine Gleichung

$$F = A \cdot 4.$$

A muß aber mindestens gleich 2 sein, denn da die körperlichen Ecken solche der zweiten Art sind, so wird die Oberfläche der Kugel mindestens zweimal überdeckt.

Nimmt man $A = 3$ an, so erhält man $F = 12$. Dieses neue Dodekaeder existiert aber wirklich. Es besitzt zwölf Ecken und dreißig Kanten; seine Oberfläche überdeckt die eingeschriebene Kugel genau dreimal. Dies kann man leicht mit Hilfe eines gewöhnlichen Ikosaeders (Fig. 17) erkennen. Legt man durch ein solches die zwölf Ebenen, deren jede fünf Ecken des Dodekaeders enthält, so erhält man das neue Dodekaeder (Fig. 18 und Taf. I), gebildet aus zwölf kongruenten

und regelmäßigen Fünfecken, von denen je fünf um eine Ecke herum angeordnet sind[15]).

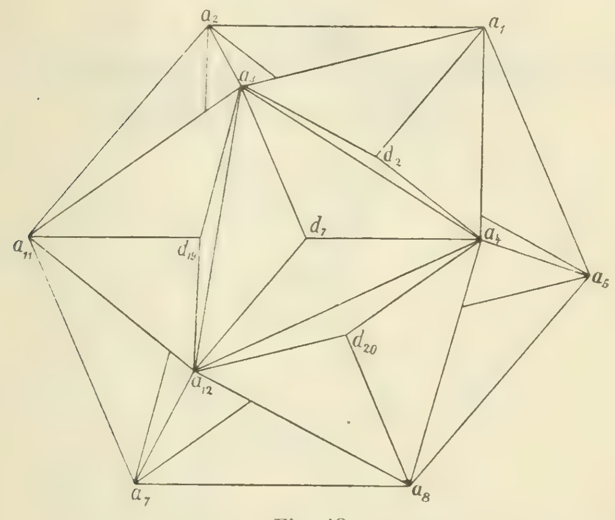


Fig. 18.

38. Auf diese Weise kann man die regelmäßigen Vielflache finden, die aus einer gleichmäßigen Anordnung von gewöhnlichen konvexen Vielecken sich ergeben. Man kann aber auch versuchen, die konvexen Vielecke höherer Art in regelmäßiger Weise zusammenzustellen.

Setzt man zunächst regelmäßige Fünfecke der zweiten Art so zusammen, daß an jedem Eckpunkte deren drei aneinandergrenzen, so entsteht ein neues Sterndodekaeder, wie leicht zu erkennen ist. Dieses neue regelmäßige Vielflach besitzt dreiseitige körperliche Ecken und dreißig Kanten, wie das gewöhnliche Dodekaeder; die eingeschriebene Kugel überdeckt es genau viermal, so daß mithin seine Oberfläche von keiner Geraden in mehr als vier Punkten geschnitten werden kann. Dieses Dodekaeder läßt sich leicht mit Hilfe des vorangegangenen Dodekaeders, das die Kugel dreimal überdeckt, konstruieren. Denn verlängert man die Kanten aller Seitenflächen (Fig. 19), bis sie sich schneiden, so erhält man zwölf Fünf-

ecke der zweiten Art, die sich zu je dreien um zwanzig Ecken anordnen und diesen neuen regelmäßigen Körper vollständig begrenzen (Fig. 20 und Taf. II)[16].

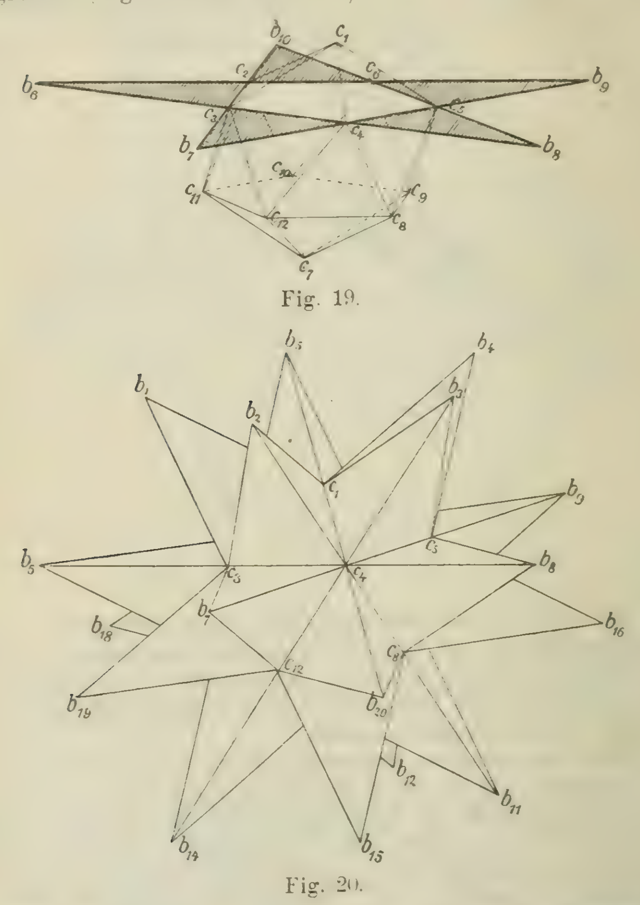


Fig. 19.

Fig. 20.

39. Verlängert man in gleicher Weise beim gewöhnlichen Dodekaeder (Fig. 21) die Kanten der zwölf Fünfecke, so erhält man ein neues Sterndodekaeder (Fig. 22 und Taf. II) aus zwölf Fünfecken zweiter Art, welche zu je fünfen an zwölf Ecken angeordnet sind; die Oberfläche dieses Sterndodekaeders bedeckt die Kugel nur zweimal[17].

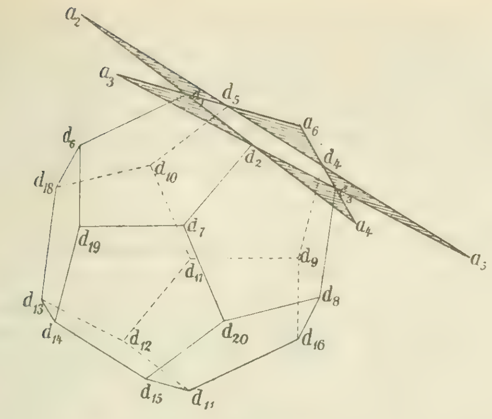


Fig. 21.

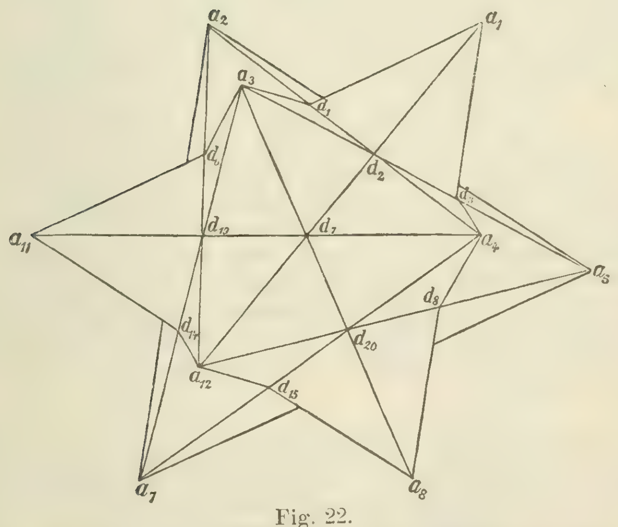


Fig. 22.

40. Von Körpern höherer Art gibt es daher vier neue vollkommen regelmäßige Vielflache, deren Existenz sicher feststeht. Diese Vielflache bieten uns aber keine neuen Zahlen dar, weder für die Seitenflächen, noch für die Ecken. Ihre Existenz macht mithin die Existenz ganz neuer Vielflache, d. h. solcher, bei denen die Anzahl der Flächen oder Ecken nicht

eine der Zahlen 4, 6, 8, 12, 20 ist, nicht wahrscheinlicher. Sind solche Vielflache unmöglich, und kann man Punkte auf einer Kugelfläche nur dann gleichmäßig verteilen, wenn ihre Anzahl gleich einer der obigen Zahlen ist? Dies ist ein Problem, das einer eingehenden Untersuchung gewürdigt zu werden verdient, und das in voller Strenge zu lösen nicht leicht erscheint.

41. Einerseits hindert nichts, die Konstruktion von unendlich vielen neuen regelmäßigen Vielflachen zu versuchen. Man kann — um dies an einem Beispiele besser verständlich zu machen — sieben gleichseitige Dreiecke so um einen Punkt anordnen, daß ihre sieben Grundlinien ein regelmäßiges Siebeneck zweiter Art bilden, wie oben gezeigt wurde. Ist auf diese Weise die erste körperliche Ecke gebildet, so haben ihre Seitenflächen gegeneinander gleiche Neigung. Fährt man nun fort, unter demselben Neigungswinkel längs der Kanten neue, den ersten gleiche Dreiecke an die früheren anzuschließen, so läßt sich dadurch sicherlich eine solche zusammenhängende Gruppe von Dreiecken bilden, daß regelmäßig je sieben von ihnen um die verschiedenen Scheitelpunkte vereinigt sind. Die Gesamtheit aller dieser Dreiecke kann offenbar einer Kugel eingeschrieben und einer andern umgeschrieben werden; jedes von ihnen bedeckt, projiziert auf die ein- oder umgeschriebene Kugel, einen bestimmten kommensurablen Teil, der in unserem Beispiele gleich $\frac{5}{28}$ ist[18]. Fügt man nun aber in derselben Weise immer weitere kongruente Dreiecke an, schließt sich dann, wie bei den früheren neuen Körpern die Figur nach Hinzufügung einer endlichen Anzahl von Dreiecken, oder kann diese Konstruktion unendlich oft wiederholt werden, ohne daß dies geschieht?

42. Andererseits begegnet man, wenn sich die Figur schließt, einem andern, sehr schwierig zu widerlegenden Einwande. In dem obigen Beispiele hätte man dann in der Tat ein neues regelmäßiges Vielflach, dessen Flächenanzahl gleich 28 oder einem Vielfachen von 28 ist, wie oben gezeigt wurde. Bezeichnet man nun die Mittelpunkte aller dieser Flächen, so würde man ebensoviele, regelmäßig über die Kugel verteilte Punkte erhalten. Alle diese Punkte können aber als Eckpunkte eines nach der gewöhnlichen Definition ganz konvexen Vielflachs angesehen werden; denn man

brauchte nur durch diese Punkte alle Ebenen so zu legen, daß in jeder Ebene so viele Punkte als möglich und alle übrigen auf ein und derselben Seite dieser Ebene liegen. Man vermag nicht einzusehen, warum dieses Vielflach, dessen Ecken gleichmäßig über die Kugelfläche verteilt sind, nicht ein vollkommen regelmäßiges sein sollte. Dann hätte man aber ein regelmäßiges Vielflach der ersten Art, dessen Eckenzahl nicht gleich einer der Zahlen 4, 6, 8, 12, 20 ist; dies ist aber als ganz unmöglich nachgewiesen.

43. Muß aber auch das konvexe Vielflach, das die Mittelpunkte der Seitenflächen eines andern regelmäßigen Vielflachs oder seine Ecken selbst zu Ecken hat, notwendigerweise selbst regelmäßig sein? Bekanntlich ist dies der Fall bei den gewöhnlichen fünf regelmäßigen Körpern. So liefern die vier Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders wieder ein solches. Die sechs Mittelpunkte der Flächen eines Würfels bestimmen ein regelmäßiges Oktaeder und umgekehrt. Die zwölf Mittelpunkte der Dodekaederflächen sind die zwölf Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders und umgekehrt. Auch für die vier neuen Körper, die wir fanden, gilt dasselbe. Kann man aber beweisen, daß dies auch für alle möglichen regelmäßigen Körper gilt? Das ist es gerade, was uns nicht bewiesen erscheint. Sicherlich kann man sagen, daß die Ecken eines regelmäßigen Vielflachs und die Mittelpunkte seiner Seitenflächen gleichmäßig über die Kugel verteilt sind; aber weiß man genau, was man unter gleichmäßig über die Kugel

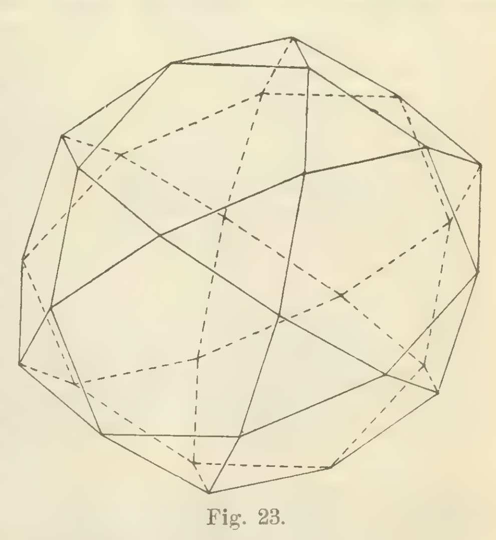


Fig. 23.

verteilten Punkten zu verstehen hat? Markiert man die dreißig Mittelpunkte der dreißig Kanten des gewöhnlichen Ikosaeders, so scheint es wohl, daß diese dreißig Punkte gleichmäßig über die Kugel verteilt sind, und dennoch ist das konvexe Vielflach (Fig. 23), welches die Punkte als Ecken hat, kein regelmäßiges. Es ist vielmehr konstruiert aus zwölf Fünfecken und zwanzig Dreiecken und gehört zu jenen halbregelmäßigen Körpern, welche man als Archimedische Körper*) bezeichnet hat. Nimmt man die Mitten der dreißig Kanten des Dodekaeders, so erhält man wieder denselben halbregelmäßigen Körper. Auch die Mittelpunkte der zwölf Kanten des Würfels oder der zwölf Kanten des Oktaeders liefern einen und denselben halbregelmäßigen Körper, der aus acht Dreiecken und sechs Quadraten gebildet ist (Fig. 24). Die Mittelpunkte der sechs Kanten des regelmäßigen Tetraeders ergeben die Ecken eines vollkommen regelmäßigen Oktaeders (Fig. 25). Von diesem neuen Gesichtspunkte aus

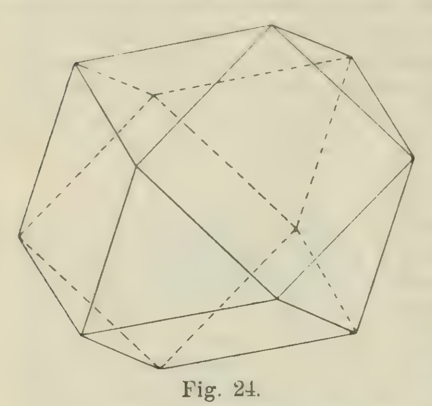


Fig. 24.

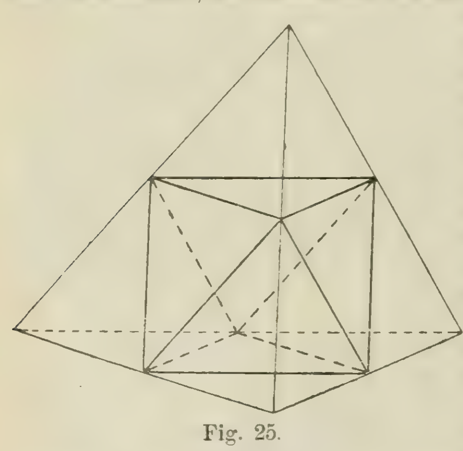


Fig. 25.

*) *Lidonne*[19] hat einer Tafel aller Teiler der Zahlen die Beschreibung dieser Körper, deren es dreizehn gibt, und die *Kepler* die dreizehn Archimedeischen Körper nennt, angefügt. Wir wissen nicht, was zu dieser Benennung von Körpern, die *Archi-*

betrachtet, erscheint das Tetraeder als der vollkommenste aller regelmäßigen Körper. Aber diese Ausnahme zugunsten des Tetraeders läßt erkennen, daß die Mittelpunkte der Kanten eines regelmäßigen Körpers ganz ebenso gleichmäßig über die Kugel verteilt sein können, wie die Ecken und Mittelpunkte der Flächen, und daß folglich durch nichts in ganz strenger Weise die Unmöglichkeit eines regelmäßigen Vielflachs höherer Art bewiesen ist, das z. B. entweder dreißig Flächen oder dreißig Ecken besitzt.

44. Man kann jedoch — wie wir noch bemerken — nicht sagen, daß die Eigenschaft des Tetraeders, durch Verbinden der Mittelpunkte seiner Kanten ein regelmäßiges Oktaeder zu liefern, darin begründet sei, daß das Tetraeder sechs Kanten besitzt, und daß diese Zahl gleich der Anzahl der Ecken eines andern existierenden Vielflachs, hier des Oktaeders, ist. Denn man würde sonst auch behaupten können, daß die Mittelpunkte der Kanten des Würfels und des Oktaeders, da diese Körper zwölf Kanten besitzen, die Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders ergeben müssen, was nicht der Fall ist.

45. Hieraus erkennt man, was Untersuchungen auf diesem Forschungsgebiete schwierig macht. In der Theorie der Vielflache darf man, wie in der Theorie der Zahlen, häufig nicht von einem besonderen Falle auf einen andern schließen. Die meisten Eigenschaften sind individuell und folgen keinen Gesetzen. Überdies kommt zu dieser der Art von Untersuchungen eigentümlichen Schwierigkeit hier noch eine weitere hinzu, die viel größer ist, als man glaubt, nämlich sich ohne große Mühe Körper zu konstruieren oder darzustellen, Ebenen durch sie hindurchzulegen, Diagonalen zu ziehen und andere Figuren ihnen einzuschreiben. Wären Darstellungen von Körpern ebenso leicht und ebenso übersichtlich herzustellen, wie die von ebenen Figuren, die man beliebig oft und in bequemster Weise zeichnen und wiederholen kann, so zweifele ich nicht, daß man eine Menge merkwürdiger, jetzt noch verborgener Sätze über

medes nirgends erwähnt, Veranlassung gegeben hat. Sicherlich scheint sie bereits vor *Kepler* gebräuchlich gewesen zu sein, wie man aus folgender Stelle seiner *Harmonices mundi* erkennt: Perfectae in solido congruentiae gradus inferioris, species sunt tredecim: ex quibus oriuntur tredecim Archimedea corpora. Bei Körpern gibt es dreizehn Arten eines niederen Grades vollkommener Regelmäßigkeit: diese ergeben die dreizehn Archimedeischen Körper.

die festen Körper entdecken würde; ja sogar, daß die Mathematiker des Altertums bereits viele gefunden hätten.

Wir haben nicht die Absicht, hier dieses besondere Gebiet der Geometrie eingehender zu behandeln; wir hoffen, an anderer Stelle darauf zurückkommen zu können. Wir haben sogar auf die meisten der obigen Probleme nur hingewiesen, und wir hätten noch vieles hinzufügen können. Das Wenige aber, was darüber gesagt ist, vermag neue Gesichtspunkte zu ergeben. und wir werden die Fortsetzung dieser Betrachtungen nur mit größtem Vergnügen wieder aufnehmen[20].

Zusatz zu der Abhandlung über Vielflache.

Bekanntlich besteht zwischen den drei Zahlen, die die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Vielflachs bezeichnen, eine notwendige Beziehung. Dieser bemerkenswerte Satz. den *Euler* in den *Mémoires de Pétersbourg* vom Jahre 1758 zum ersten Male aufgestellt und abgeleitet, und *Legendre* dann in seinen *Élémens de géométrie* in viel einfacherer Weise bewiesen hat[21], besagt, daß die Zahl der Eckpunkte vermehrt um die Zahl der Flächen gleich der Zahl der Kanten vermehrt um Zwei ist. Wenn man also die Zahl der Ecken mit E, die Zahl der Flächen mit F und die Zahl der Kanten mit K bezeichnet, so ist stets

$$E + F = K + 2.$$

Vielleicht wird man nun gern wissen wollen, ob diese Beziehung auch für die Vielflache höherer Art gilt, und, wenn es nicht der Fall ist, welche andere Beziehung ihr entspricht.

Zunächst bemerken wir, daß die vorstehende Gleichung nicht nur für die gewöhnlichen konvexen Körper gültig ist. d. h. für solche Körper, deren Oberfläche von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Sie trifft vielmehr auch noch für jedes Vielflach mit einspringenden körperlichen Ecken zu, vorausgesetzt, daß sich in seinem Inneren ein Punkt als Mittelpunkt einer Kugel finden läßt, auf deren Oberfläche die Seitenflächen des Körpers durch Strahlen aus dem Mittelpunkte so projiziert werden, daß die Projektionen verschiedener Seitenflächen sich nicht ganz oder teilweise überdecken. Diese Voraussetzung trifft, wie man erkennt,

bei unendlich vielen Vielflachen mit einspringenden körperlichen Ecken zu. Die Richtigkeit dieser Behauptung bestätigt man leicht durch denselben Beweis, den *Legendre* gegeben hat, und an dem nichts geändert zu werden braucht.

Bei den von uns betrachteten neuen Körpern überdecken sich die Projektionen der Seitenflächen auf die Kugel mehrfach. Da dies aber über die ganze Kugeloberfläche hin gleichmäßig geschieht, so ergibt sich ebenfalls eine allgemeine Beziehung zwischen den drei Zahlen E, F, K und den beiden Zahlen, die wir in der vorhergehenden Abhandlung mit a und A bezeichnet haben, und die die Art der körperlichen Ecken und die Art des Vielflachs angeben.

Ist n die Anzahl der Seiten eines gewöhnlichen sphärischen Vielecks, das einer Seitenfläche des Körpers entspricht, und s die Summe der Winkel dieses Vielecks, so findet man für seinen Flächeninhalt

$$s - 2n + 4,$$

und ebenso für die andern Vielecke

$$s' - 2n' + 4$$
$$s'' - 2n'' + 4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

wo mit s', n'; s'', n''; ... die gleichen Größen wie mit s und n bezeichnet sind.

Addiert man alle diese Werte, so ist ihre Summe offenbar gleich A-mal dem Inhalte der ganzen Kugeloberfläche, d. i. $A \cdot 8$, wenn A angibt, wie oft die Kugel überdeckt wird. Demnach hat man

$$s + s' + s'' + \ldots - 2(n + n' + n'' + \ldots) + 4F = A \cdot 8.$$

Die Summe der Winkel, die an jeder Ecke liegen, beträgt a-mal vier Rechte, da a die Art der körperlichen Ecken angibt. Daher ist die Summe der Winkel in allen Vielecken $a \cdot 4$ multipliziert in die Anzahl der Ecken, folglich

$$s + s' + s'' + \ldots = a \cdot 4E.$$

Andererseits ist die Summe der Seiten aller Flächen gleich der doppelten Anzahl der Kanten, da in jener Summe jede Kante bei zwei Flächen als Seite gezählt ist, und mithin ist

$$n + n' + n'' + \ldots = 2K.$$

Setzt man diese beiden Werte in die obige Gleichung ein und teilt durch 4, so erhält man die gesuchte Gleichung

$$aE + F = K + 2A.$$

Will man die gewöhnlichen Körper betrachten, so setzt man

$$a = 1, \ A = 1$$

und erhält die *Euler*sche Gleichung.

Betrachten wir das neue Dodekaeder mit ebenen Fünfecken erster Art (Nr. 37), so hat man

$$a = 2, \ A = 3,$$

und die Gleichung wird

$$2E + F = K + 3 \cdot 2.$$

Dieser Körper hat aber zwölf Seitenflächen und zwölf Ecken, und folglich muß die Zahl seiner Kanten gleich dreißig sein, was auch richtig ist[22].



Untersuchungen über die Vielflache.

Von

A. L. Cauchy.

(Journal de l'École polytechnique. 16. cahier [Tome IX], p. 68—86. Paris 1813. — Gelesen in der ersten Klasse des Institutes im Februar 1811.)

[**68**] Die Abhandlung, welche ich der Klasse vorzulegen die Ehre habe, enthält verschiedene Untersuchungen über die Geometrie der Körper. Ihr erster Teil gibt die Antwort auf die von *Poinsot* aufgeworfene Frage nach der Anzahl der regelmäßigen Vielflache, die man konstruieren kann; der zweite Teil bringt den Beweis eines neuen Satzes über die Vielflache im allgemeinen.

Erster Teil.

Poinsot stellt in seinem »*Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*«, nachdem er vier Vielflache von höherer als der gewöhnlich betrachteten Art beschrieben hat, die folgende Frage (vgl. S. 41, Nr. 40):

»Ist es unmöglich, daß regelmäßige Vielflache existieren, bei denen die Anzahl der Flächen nicht gleich einer der Zahlen 4, 6, 8, 12, 20 ist?«

»Dies ist«, so fügt er hinzu, »ein Problem, das einer eingehenden Untersuchung gewürdigt zu werden verdient, und das in voller Strenge zu lösen nicht leicht erscheint.«

[**69**] In der Tat läßt die Verschiedenartigkeit der Methoden, deren sich *Poinsot* bedient, um die drei neuen Dodekaeder und das neue Ikosaeder aus dem gewöhnlichen Dodekaeder und Ikosaeder abzuleiten, die Möglichkeit, das obige Problem

zu lösen, in Zweifel. Verallgemeinert man jedoch einige der in der gleichen Abhandlung von *Poinsot* aufgestellten Grundsätze, so gelangt man dazu, die regelmäßigen Vielflache höherer Arten aus denen erster Art durch eine einfache analytische Methode ableiten zu können, die unmittelbar zur Lösung des gestellten Problems führt.

Man erkennt leicht, wie *Poinsot* in Nr. 15 seiner Abhandlung (S. 18) bereits bemerkt hat, daß alle Vielecke höherer Arten dadurch erzeugt werden können, daß man die Seiten der gewöhnlichen regelmäßigen Vielecke derselben Ordnung verlängert.

Die regelmäßigen Vielflache höherer Arten lassen sich in ganz ähnlicher Weise aus den regelmäßigen Vielflachen erster Art ableiten, und man kann alle neuen regelmäßigen Vielflache bilden, indem man die Kanten oder die Seitenflächen der bereits bekannten regelmäßigen Vielflache verlängert.

So z. B. erhält man durch Verlängerung der Kanten des gewöhnlichen Dodekaeders, die die Seiten seiner zwölf fünfeckigen Seitenflächen bilden, das Sterndodekaeder zweiter Art (vgl. S. 40).

Verlängert man aber in dem gewöhnlichen Dodekaeder jede Seitenfläche bis zum Schnitte mit den Ebenen der fünf, die gegenüberliegende umgebenden Seitenflächen, so erhält man das Dodekaeder der dritten Art (vgl. S. 38), das wie das gewöhnliche Dodekaeder von zwölf Fünfecken erster Art begrenzt ist.

Wenn man schließlich in diesem Dodekaeder der dritten Art die Kanten, die die Seiten der zwölf Fünfecke bilden, verlängert, so erhält man das Dodekaeder vierter Art (vgl. S. 39).

Das Ikosaeder der siebenten Art (vgl. S. 35) erhält man dadurch, daß man jede Seitenfläche des gewöhnlichen Ikosaeders verlängert bis zum Schnitte mit den Ebenen der drei, die gegenüberliegende Seitenfläche umgebenden Dreiecke.

Was wir hier soeben in bezug auf diese vier Vierflache höherer Art erkannt haben, gilt allgemein, d. h. man kann [70] so viele regelmäßige Vielflache höherer Art konstruieren, als sich aus den regelmäßigen Vielflachen gleicher Ordnung und erster Art durch Verlängerung der Seitenflächen oder Kanten ergeben.

Nehmen wir an, daß es auf irgend eine Art gelungen sei, ein regelmäßiges Vielflach höherer Art zu konstruieren, und

denken wir uns in den Mittelpunkt der ihm eingeschriebenen Kugel versetzt, dann bieten die Ebenen der verschiedenen Seitenflächen dieses Vielflachs unserem Auge das Bild eines konvexen Vielflachs erster Art dar, das den Kern des gegebenen Vielflachs höherer Art bildet. Und wir behaupten weiter, daß die Regelmäßigkeit des Vielflachs höherer Art notwendigerweise die Regelmäßigkeit des Vielflachs erster Art, das seinen Kern bildet, nach sich zieht.

Um dies zu beweisen, greifen wir auf die Definition der regelmäßigen Vielflache zurück. Ein Vielflach beliebiger Art heißt regelmäßig, wenn es von lauter kongruenten und regelmäßigen Vielecken gebildet wird, die miteinander gleiche Neigungswinkel einschließen und in gleicher Zahl an jeder Ecke angeordnet sind. Konstruiert man nun zu einem gegebenen regelmäßigen Vielflache ein zweites, ihm ganz gleiches Vielflach, und bezeichnet mit den Nummern 1, 2, 3, 4, . . . die entsprechenden Seitenflächen der beiden Vielflache, so kann man, wie aus der obigen Definition folgt, das zweite Vielflach mit dem ersten zur Koinzidenz bringen, indem man eine beliebige Seitenfläche des zweiten Vielflachs in eine bestimmte des ersten, z. B. in die Seitenfläche mit der Nummer 1 legt und dann zwei beliebige Kanten dieser Seitenflächen zusammenfallen läßt. Genügen umgekehrt zwei gleiche Vielflache der vorstehenden Bedingung, so kann man daraus mit Sicherheit schließen, daß sie regelmäßig sind. Da man dann nämlich jede Seitenfläche des zweiten Vielflachs zum Zusammenfallen mit einer bestimmten Seitenfläche des ersten dadurch bringen kann, daß man zwei beliebige Kanten dieser Seitenflächen zusammenfallen läßt, so folgt, daß die einzelnen Seitenflächen kongruente, regelmäßige Vielecke sind; und da, wenn man zwei beliebig gewählte Seitenflächen zusammenfallen läßt, auch alle übrigen Seitenflächen ineinander zu liegen kommen, so ergibt sich weiter, daß die verschiedenen Flächenwinkel gleich sind, oder — was auf dasselbe hinauskommt — [71] daß die Seitenflächen gegeneinander gleich geneigt und in gleicher Anzahl um jede Ecke angeordnet sind.

Betrachtet man nun ein regelmäßiges Vielflach höherer Art, mit einem Vielflache erster Art derselben Ordnung, dessen Regelmäßigkeit noch nicht erwiesen ist, als Kern, und konstruiert man ein zweites Vielflach höherer Art, das zu dem ersten kongruent ist, so konstruiert man damit zugleich ein zweites Vielflach erster Art, das zu dem den Kern des

gegebenen regelmäßigen Vielflachs höherer Art bildenden Vielflache erster Art kongruent ist. Die entsprechenden Seitenflächen der beiden Vielflache höherer Art bezeichne man nun mit den Nummern 1, 2, 3, 4, . . . und mit den gleichen Nummern 1, 2, 3, 4, . . . die Seitenflächen der beiden Vielflache erster Art, die in denselben Ebenen liegen, wie die mit den gleichen Nummern bezeichneten Seitenflächen der Vielflache höherer Art. In welcher Weise man nun auch die beiden Vielflache höherer Art zur Koinzidenz bringt. stets werden auch die beiden Vielflache erster Art, die ihren Kern bilden, zusammenfallen. Da man aber die beiden Vielflache höherer Art dadurch zusammenfallen lassen kann, daß man eine beliebige Seitenfläche des zweiten mit einer bestimmten des ersten zur Deckung bringt, so folgt, daß man in gleicher Weise auch die beiden Vielflache erster Art zur Koinzidenz bringen kann. Folglich sind die verschiedenen Seitenflächen der beiden Vielflache erster Art unter sich kongruent, gegeneinander gleich geneigt und in derselben Anzahl um jede Ecke angeordnet.

Es bleibt uns also nur noch übrig zu beweisen, daß die verschiedenen Seitenflächen jedes Vielflachs erster Art auch regelmäßige Vielecke sind. Hierzu genügt es, folgendes zu beachten. Läßt man in beliebiger Weise eine der Seitenflächen des zweiten Vielflachs höherer Art mit einer bestimmten Seitenfläche des ersten Vielflachs höherer Art zusammenfallen, so kommen dadurch auch die beiden Flächen, die auf den beiden Vielflachen der ersten Art die gleichen Nummern tragen, zur Deckung. Nimmt man nun an, daß für beide Vielflache der höheren Art die Anzahl der Seiten jeder Fläche gleich n ist. so gibt es n verschiedene Arten, wie man das Zusammenfallen zweier Flächen dieser Vielflache herbeiführen kann. [72] Und folglich gibt es auch n verschiedene Arten, das Zusammenfallen entsprechender Flächen der beiden Vielflache erster Art herbeizuführen. Dieser Bedingung kann man nur durch die Annahme genügen, daß die kongruenten Flächen der beiden Vielflache erster Art entweder regelmäßige Vielecke von n^{ter} Ordnung oder halbregelmäßige Vielecke von mindestens $2\,n^{ter}$ Ordnung sind. Es läßt sich aber weiter leicht zeigen, daß dieser letztere Fall nicht möglich ist. Da man nämlich n nicht gleich 2 annehmen kann, so muß $2\,n$ wenigstens gleich 6 sein: dann aber hätte man Vielflache erster Art, deren sämtliche Flächen wenigstens sechs Seiten besitzen, was unmöglich ist.

Damit ist also jetzt bewiesen, daß man in jeder beliebigen Ordnung nur so viele regelmäßige Vielflache höherer Art konstruieren kann, als sich durch die Verlängerung der Kanten und Flächen der regelmäßigen Vielflache gleicher Ordnung und erster Art, die ihren Kern bilden, ergeben; und ferner, daß in jeder Ordnung die Flächen der Vielflache höherer Art dieselbe Anzahl von Seiten, wie die Flächen der Vielflache erster Art haben müssen.

Da es nun nur fünf Ordnungen von Vielflachen gibt, die regelmäßige Vielflache erster Art liefern, so folgt aus dem Vorstehenden zunächst, daß man nur in diesen fünf Ordnungen Vielflache höherer Art suchen kann. Mithin müssen alle regelmäßigen Vielflache, welcher Art sie auch angehören mögen, Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder oder Ikosaeder sein. Ferner müssen als Seitenflächen alle Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder, von welcher Art sie auch sein mögen, gleichseitige Dreiecke, alle Hexaeder Quadrate und alle Dodekaeder regelmäßige Fünfecke erster oder zweiter Art haben. Untersuchen wir nun, wieviel verschiedene Arten es in jeder Ordnung geben kann.

Um diese Untersuchung leichter verständlich zu machen, bemerken wir:

1. Man kann aus regelmäßigen Vielflachen erster Art nur dadurch Vielflache höherer Art ableiten, daß man entweder die Kanten schon vorhandener Flächen verlängert oder neue Flächen bildet.

2. Das Dodekaeder ist das einzige regelmäßige Vielflach, aus dem man durch Verlängern der Kanten der Seitenflächen verschiedene Arten erhalten kann, weil es zwei Arten von Fünfecken, [73] aber nur eine Art von Dreiecken und eine Art von Quadraten gibt.

3. Falls man neue Flächen bildet, kann man sie nur dadurch erhalten, daß man jede Seitenfläche des Vielflachs erster Art verlängert bis zum Schnitte mit Seitenflächen, die der betrachteten nicht benachbart sind.

4. Diese letzteren Seitenflächen müssen in gleicher Anzahl wie die Seitenflächen, die der betrachteten benachbart sind, vorhanden sein und gegen die betrachtete und untereinander gleiche Neigung besitzen.

Da beim Tetraeder jede der vier Seitenflächen den übrigen drei benachbart ist, so folgt, daß man durch Verlängerung

der vorhandenen Flächen keine neuen bilden kann. Mithin gibt es nur ein einziges Tetraeder, nämlich das erster Art.

Bei dem Hexaeder sind die Flächen, die nicht benachbart sind, einander parallel und können sich folglich nicht schneiden. Mithin gibt es auch nur ein Hexaeder, nämlich das der ersten Art.

Das gewöhnliche Oktaeder ist begrenzt von zwei gegenüberliegenden und in parallelen Ebenen gelegenen Seitenflächen, an deren jede drei gegen die beiden parallelen gleich geneigte

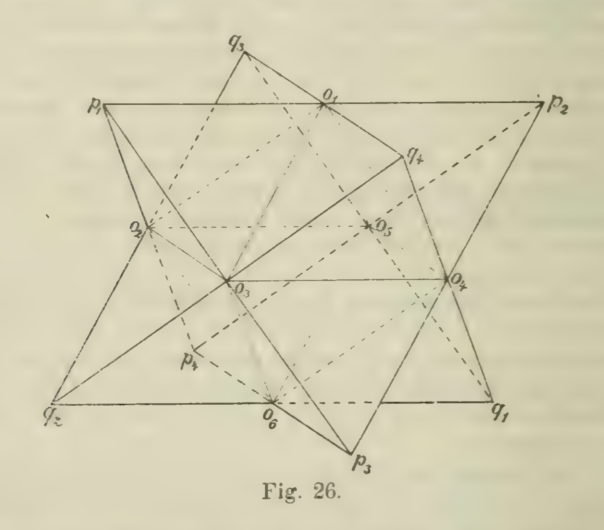


Fig. 26.

Seitenflächen angrenzen. Man kann also ein neues regelmäßiges Oktaeder nur dadurch zu erhalten hoffen, daß man jede Seitenfläche zum Schnitte bringt mit den Verlängerungen der drei Seitenflächen, die an die gegenüberliegende Fläche angrenzen. Diese Konstruktion liefert aber, statt zu einem neuen regelmäßigen Oktaeder höherer Art zu führen, einen Zwillingskörper, gebildet aus zwei sich gegenseitig durchdringenden Tetraedern (Fig. 26.) Dies ist mithin ganz analog dem regelmäßigen Sechseck, aus dem durch Verlängerung seiner Seiten nicht ein Sechseck zweiter Art, sondern zwei über Kreuz liegende gleichseitige Dreiecke entstehen [24]).

Wenn man bei dem gewöhnlichen Dodekaeder die Seiten der zwölf Fünfecke (Fig. 27) verlängert, so erhält man, wie

Poinsot bemerkt hat (vgl. S. 40), ein regelmäßiges Dodekaeder zweiter Art (Fig. 28)[17].

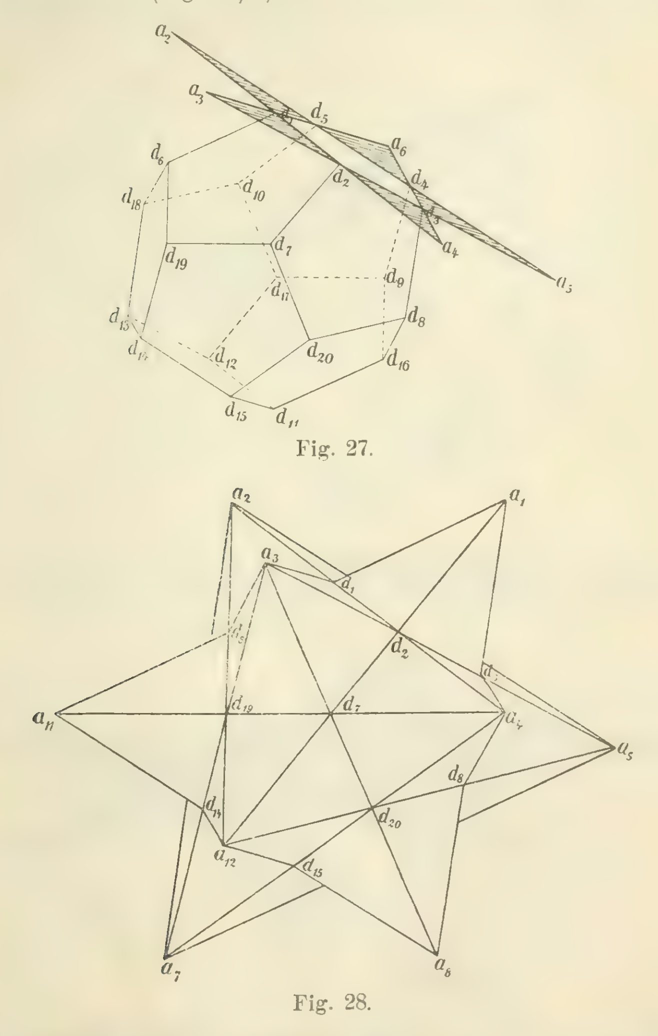


Fig. 27.

Fig. 28.

[**74**] Um noch andere Dodekaeder zu erhalten, muß man jede Seitenfläche des gewöhnlichen Dodekaeders verlängern und

mit fünf ihr nicht benachbarten, aber gegen sie gleich geneigten Flächen zum Schnitte bringen. Nun wird aber das gewöhnliche Dodekaeder begrenzt von zwei in parallelen Ebenen

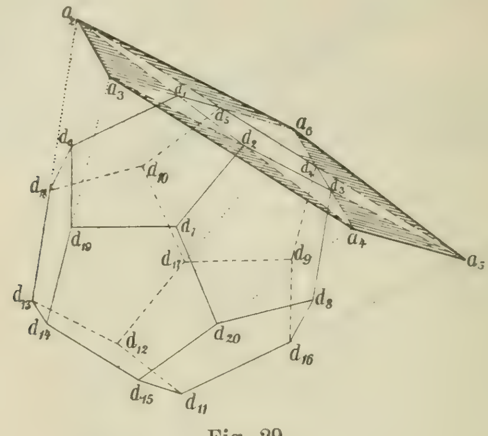


Fig. 29.

sich gegenüberliegenden Seitenflächen, an deren jede fünf andere, gegen beide gleich geneigte Flächen angrenzen. Lassen sich

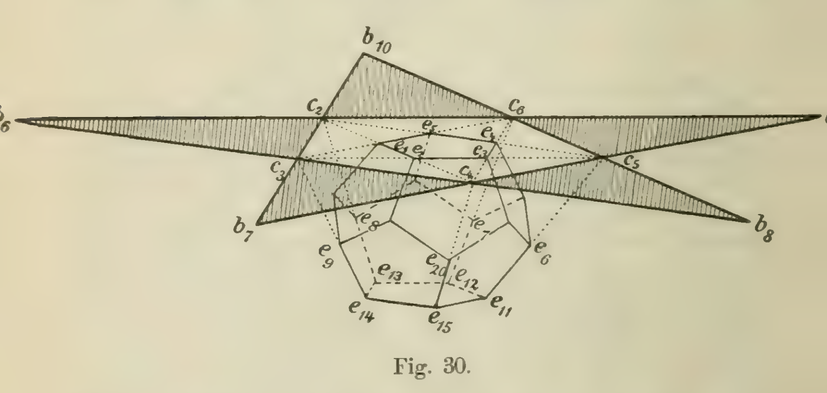


Fig. 30.

also noch andere Dodekaeder als die oben beschriebenen konstruieren, so kann dies nur dadurch geschehen, daß man jede Seitenfläche des gewöhnlichen Dodekaeders verlängert bis zum

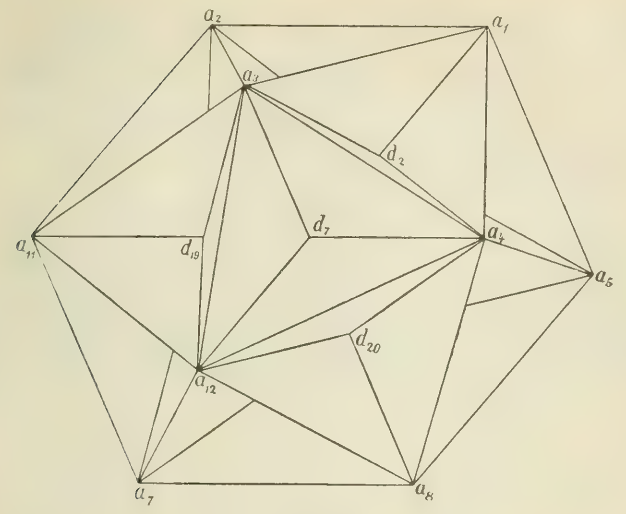

a_2
a_1
a_3
d_2
d_7
a_4
a_{11}
d_{19}
a_5
d_{20}
a_{12}
a_7
a_8

Fig. 31.

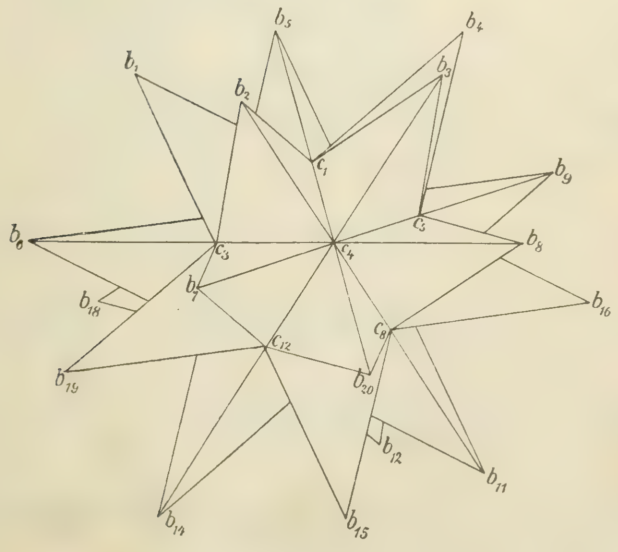

b_5
b_4
b_1
b_3
b_2
c_1
b_9
c_5
b_6
c_3
c_4
b_8
b_7
b_{18}
b_{16}
c_8
c_{12}
b_{19}
b_{20}
b_{12}
b_{11}
b_{14}
b_{15}

Fig. 32.

Schnitte mit den fünf Seitenflächen, die der Gegenfläche benachbart sind. Die Schnittgeraden dieser fünf Ebenen mit der betrachteten Seitenfläche bilden zwei regelmäßige Fünfecke, das eine von der ersten (Fig. 29)[15]) und das andere von der zweiten Art (Fig. 30)[16]. Diese beiden Fünfecke stellen die Seitenflächen der regelmäßigen Dodekaeder dritter und vierter Art dar (Fig. 31 u. 32).

Wählt man bei dem gewöhnlichen Ikosaeder eine be- Seitenfläche als Grundfläche, so findet man, wie bei den soeben betrachteten drei Körpern, eine andere Fläche, die jener in einer parallelen Ebene gegenüberliegt. Ordnet man dann die zwischen diesen beiden Seitenflächen gelegenen Dreiecke in Reihen an, indem man in eine und dieselbe Reihe alle Seitenflächen einordnet, die gegen die Grundfläche oder, was

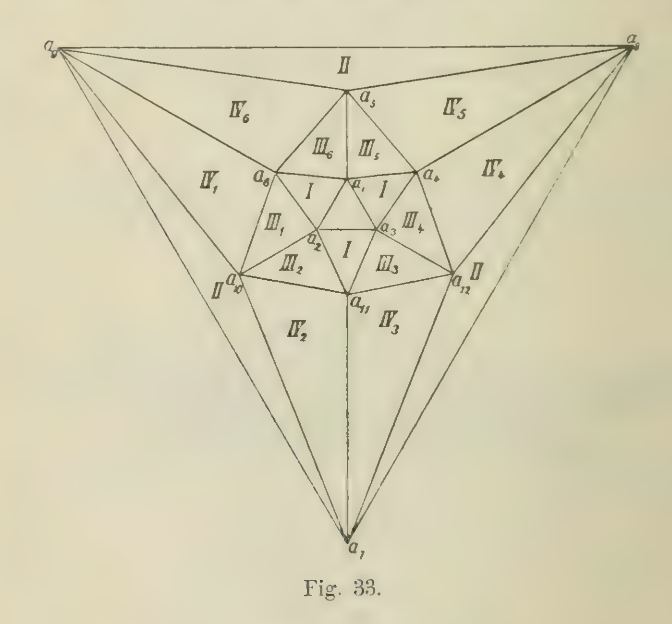


Fig. 33.

auf dasselbe hinauskommt, gegen die Gegenfläche gleich geneigt sind, so ersieht man, daß die achtzehn übrigen Dreiecke vier Reihen bilden, nämlich (Fig. 33)[25].

I. eine Reihe von drei der Grundfläche benachbarten Dreiecken;
II. eins Reihe von drei der Gegenfläche benachbarten Dreiecken;
III. eine Reihe von sechs Dreiecken, deren jedes nur einen Eckpunkt mit der Grundfläche gemeinsam hat;
IV. eine Reihe von sechs Dreiecken, deren jedes nur einen Eckpunkt mit der Gegenfläche gemeinsam hat.

Man bezeichne die Dreiecke der dritten und vierten Reihe mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6, so daß zwei aufeinanderfolgende Nummern zwei Dreiecke bezeichnen, die längs einer Kante oder in einem Eckpunkte aneinandergrenzen. Die Grundfläche eines neuen regelmäßigen Ikosaeders kann nur von den Schnittgeraden der Grundfläche des gegebenen Ikosaeders mit drei Dreiecken [**75**] einer und derselben Reihe, die gegeneinander gleich geneigt sind, gebildet werden. Nun ist aber leicht einzusehen, daß man nur auf fünf Arten die Grundfläche eines neuen Ikosaeders zu erhalten hoffen kann, nämlich indem man bis zum Schnitte mit der Ebene der gegebenen Grundfläche verlängert

1. die Ebenen der drei Dreiecke, die in der zweiten Reihe liegen;
2. die Ebenen der Dreiecke 1, 3, 5, die in der dritten Reihe liegen;
3. die Ebenen der Dreiecke 2, 4, 6, die in der dritten Reihe liegen;
4. die Ebenen der Dreiecke 1, 3, 5, die in der vierten Reihe liegen;
5. die Ebenen der Dreiecke 2, 4, 6, die in der vierten Reihe liegen.

Dehnt man diese fünf Konstruktionen allmählich auf alle Seitenflächen des gewöhnlichen Ikosaeders aus, so erhält man die folgenden Ergebnisse:

1. Wendet man die erste Konstruktion an (Fig. 34), so berührt man alle Seitenflächen und erhält das von *Poinsot* beschriebene I k o s a e d e r s i e b e n t e r A r t (vgl. S. 35) (Fig. 35)[11].

Fig. 34.

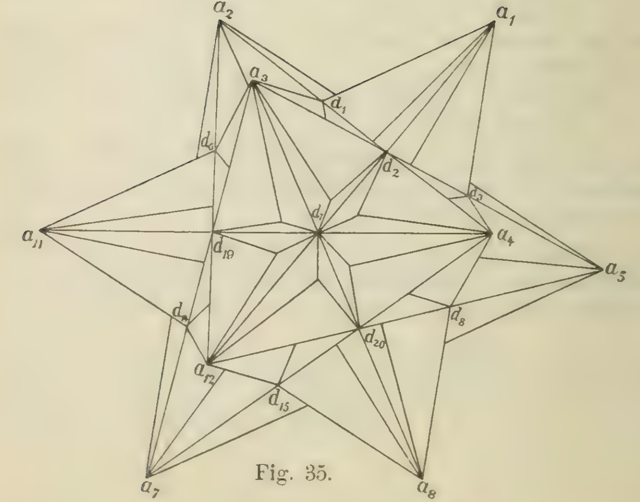


Fig. 35.

2. Bei der zweiten und dritten Konstruktion berührt man nur acht Seitenflächen und erhält lediglich ein regelmäßiges Oktaeder erster Art (Fig. 36)[26].

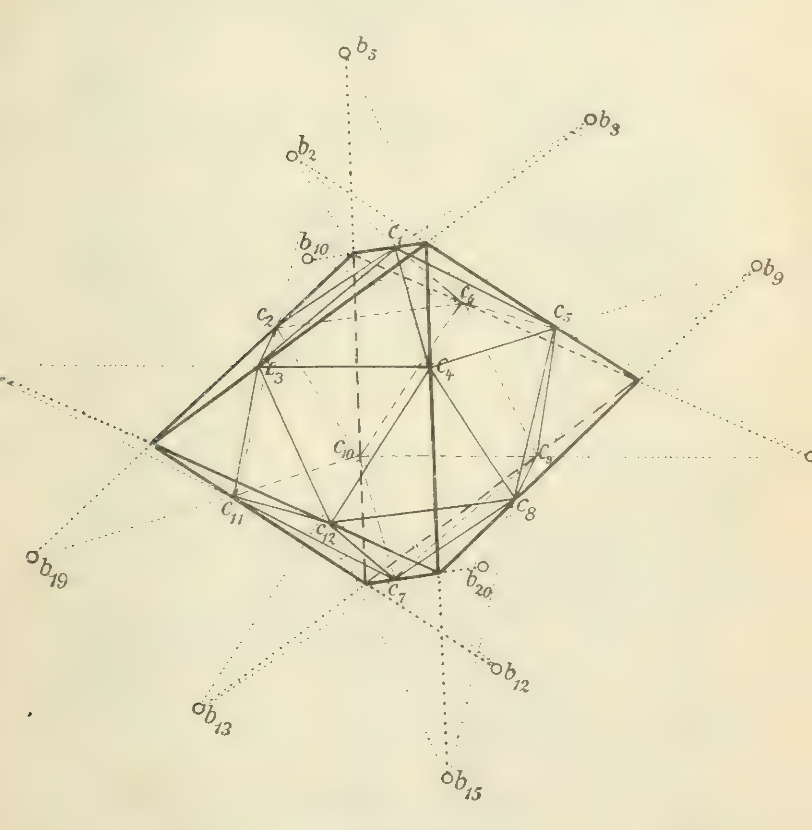


Fig. 36.

3. Bei der vierten und fünften Konstruktion berührt man nur vier Seitenflächen und erhält ein regelmäßiges Tetraeder (Fig. 37)[27].

Aus dem soeben Gesagten folgt, daß man andere regelmäßige Vielflache höherer Art als die vier von *Poinsot* beschriebenen nicht konstruieren kann.

Die vorstehend gegebene Theorie liefert auch ein Mittel, den von zwei beliebigen Seitenflächen eines regelmäßigen Vielflachs eingeschlossenen Winkel zu berechnen, wenn man die Neigungswinkel zweier benachbarten Seitenflächen für das Tetraeder, Dodekaeder und Ikosaeder erster Art kennt.

Fig. 37.

Es seien diese drei Winkel mit α, β, γ bezeichnet.

Der Neigungswinkel zweier beliebigen Flächen des Tetraeders ist stets gleich α.

[76] Zwei benachbarte Flächen des Hexaeders schneiden sich rechtwinklig, zwei nicht benachbarte Flächen sind parallel.

Bei dem Oktaeder sind die Flächen paarweise zueinander parallel. Der Neigungswinkel zweier nicht parallelen Flächen ist gleich

$$\pi - \alpha,$$

wenn die beiden Flächen benachbarte sind, und gleich

$$\alpha,$$

wenn sie es nicht sind.

Bei dem Dodekaeder sind die Flächen ebenfalls paarweise parallel zueinander. Der Neigungswinkel zweier nicht parallelen Flächen ist gleich

$$\beta,$$

wenn die beiden Flächen benachbarte sind, und gleich

$$\pi - \beta,$$

wenn sie es nicht sind.

Auch bei dem Ikosaeder sind die Flächen paarweise zueinander parallel. Bezeichnet man den Neigungswinkel einer Fläche gegen die benachbarten mit

$$\gamma,$$

so ist der Neigungswinkel derselben Fläche gegen die ihrer Gegenfläche benachbarten gleich

$$\pi - \gamma;$$

und der Neigungswinkel zweier Flächen, deren eine weder der andern, noch der Gegenfläche dieser andern benachbart ist, entweder gleich

$$\alpha \text{ oder } \pi - \alpha.$$

Zweiter Teil.

In den *Mémoires de Pétersbourg* vom Jahre 1758 hat *Euler* zuerst die Beziehung zwischen den verschiedenen Elementen der Oberfläche eines Vielflachs ermittelt. *Legendre* hat in seinen *Élémens de géométrie* den *Euler*schen Satz in viel einfacherer Weise mit Hilfe sphärischer Vielecke bewiesen. Nachdem ich durch einige Untersuchungen einen neuen Beweis dieses Satzes gefunden hatte, gelangte ich zu folgendem allgemeineren Satze als dem *Euler*schen.

[77] Satz.

Zerlegt man ein Vielflach dadurch in eine beliebige Anzahl anderer Vielflache, daß man in seinem Innern beliebig viele neue Eckpunkte annimmt, und bezeichnet man mit P die Anzahl aller so entstandenen neuen Vielflache, mit E die Gesamtzahl der Ecken, also einschließlich der Ecken des ursprünglichen Vielflachs, mit F die Gesamtzahl der Flächen und mit K die Gesamtzahl der Kanten, so ist

$$E + F = K + P + 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

d. h. die Summe gebildet aus der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen übertrifft die aus der

Anzahl der Kanten und der Anzahl der Vielflache gebildete Summe um Eins[28]).

Der *Euler*sche Satz ist, wie man leicht sieht, nur ein besonderer Fall des vorstehenden. Denn nimmt man an, daß alle Vielflache sich auf ein einziges reduzieren, so ist

$$P = 1,$$

und die Gleichung (1) vereinfacht sich in die Gleichung

$$E + F = K + 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus der Gleichung (1) ergibt sich noch ein weiterer Satz, der der ebenen Geometrie angehört. Man nehme an, daß sich alle Vielflache auf ein einziges reduziert haben, und zerstöre dann dieses letzte, indem man eine seiner Flächen als Grundfläche nimmt und in sie alle übrigen Ecken, aber ohne ihre Anzahl zu ändern, legt. Dann erhält man eine ebene Figur, die sich aus mehreren Vielecken innerhalb einer gegebenen Begrenzung zusammensetzt.

Bedeutet dann F die Anzahl dieser Vielecke, E die Anzahl ihrer Ecken und K die Anzahl ihrer Seiten, so erhält man die zwischen diesen drei Zahlen bestehende Beziehung, wenn man in der allgemeinen Gleichung (1) für $P = 0$ setzt:

$$E + F = K + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Formel besagt, daß die aus der Anzahl der Vielecke und Eckpunkte gebildete Summe die Anzahl der Geraden, die die Begrenzungen dieser Vielecke bilden, [**78**] um Eins übersteigt. Dieser letzte Satz ist in der Planimetrie das Analogon zum allgemeinen Satze in der Geometrie der Vielflache.

Wir würden den in Gleichung (1) enthaltenen allgemeinen Satz unmittelbar beweisen und aus ihm die beiden andern Sätze als Zusätze ableiten können. Um aber den Sinn dieses Beweises besser erkennen zu lassen, wollen wir damit beginnen, den Beweis des in der Gleichung (3) enthaltenen letzten Satzes in analoger Weise zu führen.

Zunächst läßt sich dieser Satz leicht auf verschiedene besondere Fälle anwenden.

Nimmt man z. B. an, daß die gegebene Begrenzung von dem Umfange eines Dreiecks gebildet wird, in dessen Innerem ein beliebiger Punkt gewählt und mit den drei Ecken des Dreiecks durch drei Gerade verbunden ist, so hat man in der ge-

gebenen Begrenzung drei Dreiecke. Diese drei Dreiecke bilden vier Eckpunkte, und die Zahl der Geraden, die ihre Seiten bilden, ist gleich sechs. Nun aber ist in Bestätigung des Satzes

$$4 + 3 = 6 + 1.$$

Nimmt man zweitens an, daß die gegebene Begrenzung ein Viereck ist, in dessen Innerem man einen Punkt beliebig gewählt und mit den vier Ecken durch vier Gerade verbunden hat, so hat man in der gegebenen Begrenzung vier Dreiecke. Diese vier Dreiecke besitzen fünf Eckpunkte und acht Seiten. Es ist aber

$$5 + 4 = 8 + 1,$$

was wiederum den Satz bestätigt.

Nimmt man schließlich an, die gegebene Begrenzung sei ein Vieleck von n Seiten, in dessen Innerem man einen Punkt beliebig gewählt und mit den n Ecken des Vielecks durch n Gerade verbunden hat, so liefern die n Dreiecke, die dadurch entstanden sind, $n + 1$ Eckpunkte und $2n$ Seiten. Da aber

$$n + 1) + n = 2n + 1$$

ist, so hat man auch in diesem Falle die Richtigkeit des erwähnten Satzes bestätigt.

Jetzt zu dem allgemeinen Falle übergehend, nimmt man an, daß F Vielecke von einer gegebenen Begrenzung umschlossen sind, [**79**] daß diese Vielecke S Ecken bilden, und ihre Seiten in K Geraden liegen. Zerlegt man jedes dieser Vielecke in Dreiecke, indem man von einem seiner Eckpunkte aus Diagonalen nach den nicht benachbarten zieht, und ist n die Anzahl aller, in den verschiedenen Vielecken gezogenen Diagonalen, so ist

$$F + n$$

die Anzahl der Dreiecke, die durch Zerlegung der Vielecke entstanden sind, und

$$K + n$$

die Anzahl der Seiten dieser Dreiecke. Die Zahl ihrer Ecken ist ebensogroß wie die Zahl der Ecken in den ursprünglichen Vielecken, also gleich

$$E.$$

Man denkt sich nun die einzelnen Dreiecke allmählich fortgenommen, bis schließlich nur ein einziges Dreieck noch übrig geblieben ist, indem man zuerst die an der äußeren Begrenzung liegenden Dreiecke und dann weiter stets nur solche fortnimmt, die eine oder zwei Seiten mit bereits entfernten Dreiecken gemeinschaftlich hatten. Es sei h' die Anzahl der Dreiecke, die in dem Augenblicke, wo man sie fortnimmt, eine Seite mit der äußeren Begrenzung gemeinsam haben, und h'' die Anzahl der Dreiecke, die in dem nämlichen Zeitpunkte mit zwei Seiten der äußeren Begrenzung angehören. Im ersten Falle hat die Wegnahme eines jeden Dreiecks das Verschwinden einer Seite und im zweiten Falle das Verschwinden zweier Seiten und einer Ecke zur Folge. Daraus ergibt sich, daß in dem Augenblicke, wo alle Dreiecke bis auf ein einziges fortgenommen sind, die Anzahl der entfernten Dreiecke gleich

$$h' + h'',$$

die Anzahl der dadurch zugleich zerstörten Seiten gleich

$$h' + 2h'',$$

und die Anzahl der zerstörten Ecken gleich

$$h''$$

ist. Die Anzahl der übrig gebliebenen Dreiecke ist also

$$F + n - (h' + h'') = 1,$$

die Anzahl der übrig gebliebenen Seiten

$$K + n - (h' + 2h'') = 3$$

und die Zahl der übrig gebliebenen Ecken

$$E - h'' = 3.$$

[**80**] Addiert man die erste Gleichung zur dritten und subtrahiert dann die zweite, so erhält man

$$E + F - K = 1$$

oder

$$E + F = K + 1, \tag{3}$$

was zu beweisen war.

Zu derselben Gleichung kann man auch gelangen, ohne erst die Vielecke in Dreiecke zu zerlegen. Betrachtet man

nämlich die einzelnen Vielecke als allmählich um ein beliebiges von ihnen, als erstes, herumgelegt, und bezeichnen k und e die Anzahl der Seiten und Ecken dieses ersten Vielecks, k' und e' die Anzahl der Seiten und Ecken des zweiten Vielecks, die es nicht mit dem ersten gemeinsam hat, k'' und e'' die Anzahl der Seiten und Ecken des dritten Vielecks, die dieses nicht mit den beiden ersten Vielecken gemeinsam hat, so erhält man folgende Gleichungen:

$$k = e,$$
$$k' = e' + 1,$$
$$k'' = e'' + 1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Addiert man alle diese Gleichungen, deren Anzahl gleich F ist, und beachtet, daß

$$k + k' + k'' + \ldots = K,$$
$$e + e' + e'' + \ldots = E$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$K = E + F - 1,$$

die mit der oben gefundenen übereinstimmt.

Folgerung. Bezeichnen k_a und e_a die Anzahl der in der äußeren Begrenzung gelegenen Seiten und Ecken, k_i und e_i die Anzahl der im Innern gelegenen Seiten und Ecken, so ist

$$k_a + k_i = K,$$
$$e_a + e_i = E$$

[81] und, da

$$e_a = k_a$$

ist, so ergibt die Gleichung (3)

$$e_i + F = k_i + 1,$$

d. h. die Anzahl der inneren Eckpunkte vermehrt um die der Vielecke ist gleich der um Eins vergrößerten Anzahl der inneren Seiten.

Der *Euler*sche Satz ist eine unmittelbare Folge des in der Gleichung

$$E + F = K + 1$$

enthaltenen Satzes. Es bezeichne F jetzt die Anzahl der Flächen eines konvexen Vielflachs, E die Anzahl der Ecken

und K die Anzahl der Kanten, die in der Oberfläche desselben liegen. Nimmt man nun aus der Oberfläche des betrachteten Körpers eine Seitenfläche heraus, so kann man sagen, daß die übrigen Seitenflächen, deren Zahl $F-1$ ist, eine Reihe von Vielecken bilden, die von der Begrenzung der herausgenommenen Fläche umschlossen werden. Folglich müssen die Zahlen E, K und $F-1$ dem oben bewiesenen Satze genügen. Denn ob die Vielecke in einer und derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen, ist für die Gültigkeit jenes Satzes ganz ohne Bedeutung, da er nur die Anzahl der Vielecke und die Anzahl ihrer Elemente enthält. Für ein Vielflach hat man also

$$E + (F - 1) = K + 1$$

oder

$$E + F = K + 2, \tag{2}$$

welche Gleichung den *Euler*schen Satz darstellt.

Nun kehren wir zu dem allgemeinen Satze, von dem die beiden vorhergehenden Sätze nur besondere Fälle sind, zurück und wollen ihn zunächst auf einige einfache Fälle anwenden.

Nimmt man zunächst an, daß man einen beliebigen Punkt im Innern einer dreiseitigen Pyramide durch vier Gerade mit ihren vier Eckpunkten verbindet, so zerlegt man die Pyramide in vier neue dreiseitige Pyramiden, die fünf Eckpunkte, zehn Seitenflächen und zehn Kanten bilden. [**82**] In diesem Falle beträgt die Summe der Kanten und Vielflache vierzehn; da die Summe der Ecken und Flächen gleich fünfzehn ist, so übersteigt sie die Vierzehn um eine Einheit; der Satz ist also bestätigt.

Nimmt man zweitens an, daß man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Würfels acht Gerade nach seinen acht Eckpunkten zieht, so wird der Würfel in sechs vierseitige Pyramiden zerlegt, die neun Eckpunkte, achtzehn Seitenflächen und zwanzig Kanten bilden. In diesem Falle ergeben die Kanten und Vielflache die Summe sechsundzwanzig; die Summe der Flächen und Ecken beträgt siebenundzwanzig, übersteigt also die erstere Summe um Eins, was wiederum den Satz bestätigt.

Nimmt man schließlich ein beliebiges Vielflach, dessen Oberfläche f Seitenflächen, k Kanten und e Ecken enthält, und zieht man von irgend einem inneren Punkte e gerade Linien nach seinen verschiedenen Ecken, so zerlegt man dadurch das Vielflach in ebensoviele Pyramiden, als es Seitenflächen hat,

und erzeugt im Innern ebensoviele Flächen, als Kanten, und ebensoviele Kanten, als Ecken auf der äußeren Begrenzung des Vielflachs vorhanden sind. Man erhält also f Pyramiden, die $e + 1$ Ecken, $f + k$ Flächen und $k + e$ Kanten bilden. Mithin ergibt die Anzahl der Pyramiden vermehrt um die Anzahl der Kanten die Summe

$$f + (k + e),$$

und die Anzahl der Seitenflächen und Ecken die Summe

$$(f + k) + (e + 1).$$

Diese letztere Summe übersteigt die erstere um Eins, womit der Satz von neuem bestätigt ist.

Wir gehen jetzt zu dem Beweise des in Rede stehenden Satzes für den allgemeinsten Fall über und nehmen an, daß P Vielflache in einem gegebenen Vielflache 𝔙 eingeschlossen sind. Es bezeichne E die Anzahl der Ecken aller dieser Vielflache, F die Anzahl ihrer Flächen und K die Anzahl ihrer Kanten. [83] Teilen wir alle Seitenflächen durch Diagonalen in Dreiecke, und ist n die Anzahl aller dieser Diagonalen, so ist die Gesamtzahl aller Dreiecke, in die die Flächen der verschiedenen Vielflache zerlegt werden, gleich

$$F + n.$$

Jedes einzelne der P Vielflache werde — wie wir weiter annehmen — dadurch in dreiseitige Pyramiden geteilt, daß man durch eine seiner Ecken und die Seiten der nicht in ihr zusammenstoßenden Dreiecke dreieckige Seitenflächen hindurchlegt. Ist

$$P + p$$

die Anzahl der auf diese Weise in den verschiedenen Vielflachen gebildeten Pyramiden und k die Anzahl der dabei entstandenen neuen Kanten, so ist die Anzahl der neuen Dreiecke, die die Seitenflächen dieser Pyramiden bilden, gleich

$$p + k.$$

Um sich hiervon zu überzeugen, genügt es zu beachten, daß, wenn man von diesen verschiedenen Pyramiden zuerst alle diejenigen konstruiert, die an die Oberflächen der P Vielflache angrenzen, man nie mehr als eine oder zwei neue Seitenflächen zu bilden braucht, um jede Pyramide zu erhalten; im ersteren

Falle ergibt sich dadurch eine neue Pyramide allein, im letzteren dagegen eine neue Pyramide und eine neue Kante.

Da nun nach Zerlegung der Vielflache in dreiseitige Pyramiden die Gesamtzahl dieser Pyramiden gleich

$$P + p$$

und die ihrer Kanten gleich

$$K + n + k$$

ist, so ergibt sich aus dem Vorstehenden die Anzahl aller Seitenflächen gleich

$$F + n + p + k.$$

Die Zahl der Endpunkte ist unverändert gleich

$$E.$$

Wir nehmen jetzt weiter an, daß man von dem gegebenen Vielflache $\mathfrak{V}$ die verschiedenen dreiseitigen Pyramiden, aus denen es zusammengesetzt ist, nacheinander wegnimmt, bis schließlich nur eine einzige Pyramide übrig bleibt, und zwar so, daß man mit den Pyramiden beginnt, die in der äußeren Oberfläche des gegebenen Vielflachs $\mathfrak{V}$ gelegene dreieckige Flächen besitzen, und dann weiterhin solche Pyramiden fortnimmt, von denen eine oder mehrere Flächen durch die Fortnahme früherer Pyramiden erst aufgedeckt worden sind. Jede Pyramide, die man fortnimmt, hat demnach entweder eine oder zwei oder drei aufgedeckte Seitenflächen. [**84**] Bezeichnet p' die Anzahl der Pyramiden, die im Augenblicke ihrer Fortnahme eine zutage liegende Fläche besitzen, p'' und p''' die Anzahl der Pyramiden, die alsdann zwei, bzw. drei aufgedeckte Flächen besitzen, so hat die Wegnahme einer Pyramide im ersten Falle den Fortfall einer Fläche, im zweiten Falle den Fortfall zweier Flächen und der ihnen gemeinsamen Kante, und im dritten Falle den Fortfall einer Ecke mit drei Seitenflächen und drei Kanten zur Folge. Mithin ist, sobald alle Pyramiden mit Ausnahme einer einzigen weggenommen sind, die Anzahl der beseitigten Ecken gleich

$$p''',$$

die Anzahl der weggenommenen Pyramiden gleich

$$p' + p'' + p''',$$

die Anzahl der fortgefallenen Dreiecke gleich

$$p' + 2p'' + 3p'''$$

und die Anzahl der beseitigten Kanten gleich

$$p'' + 3p'''.$$

Die Anzahl der dann noch übrig gebliebenen Ecken kann folglich dargestellt werden durch

$$E - p''' = 4,$$

die Anzahl der noch vorhandenen Pyramiden durch

$$P + p - (p' + p'' + p''') = 1,$$

die Anzahl der übrig gebliebenen Dreiecke durch

$$F + n + p + k - (p' + 2p'' + 3p''') = 4$$

und die Anzahl der noch übrigen Kanten durch

$$K + n + k - (p'' + 3p''') = 6.$$

Addiert man die erste dieser vier Gleichungen zur dritten, so erhält man

$$E + F + n + p + k - (p' + 2p'' + 4p''') = 8.$$

Addiert man die zweite zur vierten Gleichung, so ergibt sich

$$K + P + n + p + k - (p' + 2p + 4p''') = 7.$$

85. Subtrahiert man schließlich die letzte der eben gefundenen Gleichungen von der vorhergehenden, so erhält man

$$E + F - K - P = 1$$

oder

$$E + F = K + P + 1, \qquad \ldots \ldots (1)$$

was zu beweisen war.

Zu der vorstehenden Gleichung kann man aber auch gelangen, ohne die Zerlegung der Vielflache in dreiseitige Pyramiden zu Hilfe zu nehmen. Wir betrachten die einzelnen in dem gegebenen $\mathfrak{B}$ eingeschlossenen Vielflache als um ein beliebiges von ihnen, als erstes, herum angeordnet. Es mögen k, f und e die Anzahl der Kanten, Flächen und Ecken dieses ersten Vielflachs bezeichnen; k', f', e' die Anzahl derjenigen Kanten, Flächen und Ecken des zweiten Vielflachs, die es nicht

mit dem ersten gemeinsam hat; k'', f'', e'' die Anzahl derjenigen Kanten, Flächen und Ecken des dritten Vielflachs, die dieses nicht mit den beiden ersten Vielflachen gemeinschaftlich hat, usw. Dann ist auf Grund des *Euler*schen Satzes und des Satzes über die Vielecke (siehe die Folgerung auf S. 64):

$$e + f = k + 2,$$
$$e' + f' = k' + 1,$$
$$e'' + f'' = k'' + 1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Addiert man alle diese Gleichungen, deren man P hat, und beachtet, daß

$$e + e' + e'' + \ldots = E,$$
$$f + f' + f'' + \ldots = F,$$
$$k + k' + k'' + \ldots = K$$

ist, so erhält man

$$E + F = K + P + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Folgerung. Bezeichnet man mit e_a, k_a und f_a die Anzahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen, die auf der äußeren Begrenzung des gegebenen Vielflachs $\mathfrak{V}$ liegen, und mit e_i, k_i und f_i die Anzahl der in seinem Innern gelegenen Ecken, Kanten und Flächen, so ist

$$E = e_a + e_i,$$
$$K = k_a + k_i,$$
$$F = f_a + f_i.$$

Nach dem *Euler*schen Satze ist aber

$$e_a + f_a = k_a + 2,$$

folglich findet man aus der Gleichung (1)

$$e_i + f_i = k_i + P - 1.$$

Mitteilung zur Theorie der regelmäßigen Vielflache.

Von

J. Bertrand.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, tome 46, p. 79—82. 1858, Januar—Juni. Paris.

[**79**] Nachdem die Aufmerksamkeit der Akademie soeben [29]) auf die höchst interessante Theorie der Vielflache gelenkt worden ist, benutze ich diese Gelegenheit, um mitzuteilen, daß *Gourjon*, dessen Geschicklichkeit und erfinderischer Geist den Physikern bekannt ist, die Liebenswürdigkeit gehabt hat, auf meinen Wunsch die regelmäßigen Sternvielflache, die in dem zweiten Bande der *Mémoires des Savants étrangers* *) beschrieben worden sind, zu konstruieren. *Poinsot*, der diese Vielflache entdeckt hat, besitzt zwar bereits Modelle derselben: aber trotz des großen Wohlwollens, mit dem der berühmte Mathematiker alle empfing, die sie zu studieren wünschten, standen sie doch nicht eigentlich der Öffentlichkeit zur Verfügung. Dies ist bei den von *Gourjon* konstruierten Modellen in vollem Maße der Fall, da sie jetzt dem *Collège de France* gehören. Bekanntlich sind diese vier *Poinsot*schen Körper und die von alters her bekannten fünf regelmäßigen Vielflache die einzigen, regelmäßigen Körper, die möglich sind. Dies hat *Cauchy* in einer der Akademie im Jahre 1811 überreichten Abhandlung bewiesen. Sein Beweis ist vollkommen streng, erfordert aber große Aufmerksamkeit und kann nur dann verstanden werden, wenn man alle seine Schlüsse an wirklichen Modellen des regelmäßigen Dodekaeders und Ikosaeders erster Art sorgsam nachprüft. Ich biete im folgenden einen neuen Beweis dar, der mir leichter verständlich zu sein scheint.

---

*) T. II, p. 552—591.

Erster Hilfssatz. Sind beliebige Punkte im Raume gegeben, so kann man stets ein konvexes Vielflach erster Art konstruieren, dessen Eckpunkte sich unter den gegebenen Punkten befinden, und das alle übrigen Punkte in seinem Innern enthält. Wir wollen den Beweis dieses, beinahe evidenten Satzes nicht ausführen[30].

[80] **Zweiter Hilfssatz.** Es kann kein konvexes Vielflach erster Art geben, bei dem jede Ecke von mehr als fünf Seitenflächen gebildet wird.

Dieser Satz, eine leicht zu beweisende Folgerung aus dem berühmten *Euler*schen Satze, ist schon längst bekannt.

Erster Satz. Ein regelmäßiges Vielflach höherer Art muß dieselben Ecken haben, wie ein regelmäßiges Vielflach erster Art.

Die Eckpunkte eines jeden regelmäßigen Vielflachs liegen bekanntlich auf einer Kugelfläche: jedes Vielflach erster Art, dessen Eckpunkte sich unter jenen Punkten befinden, kann mithin die übrigen nicht in seinem Innern einschließen. Auf Grund des ersten Hilfssatzes folgt daraus, daß ein Vielflach erster Art existiert, das alle Eckpunkte des betrachteten regelmäßigen Vielflachs höherer Art als Ecken besitzt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß dieses Vielflach erster Art auch regelmäßig ist. Zu dem Zwecke betrachten wir zwei einander kongruente Figuren P und Q, von denen jede aus dem betrachteten regelmäßigen Vielflache höherer Art und dem dieselben Ecken besitzenden konvexen Vielflache erster Art besteht. Nun kann P nicht nur in der angenommenen Weise mit Q zur Deckung gebracht werden, sondern man kann die Koinzidenz beider Körper dadurch erreichen, daß man eine beliebige Ecke von Q mit einer bestimmten Ecke von P zusammenfallen läßt. Liegen aber zwei Ecken ineinander, so kann weiter das Zusammenfallen der beiden regelmäßigen Vielflache höherer Art, die Teile der Figuren P und Q bilden, und mithin auch das Zusammenfallen der ganzen Figuren mindestens auf dreierlei Weise bewirkt werden. Denn in den betrachteten Ecken stoßen wenigstens drei Seitenflächen der regelmäßigen Vielflache höherer Art zusammen, und ihre Koinzidenz kann erzielt werden, indem man eine Seitenfläche des ersten Vielflachs mit einer beliebigen Seitenfläche des zweiten zur Deckung bringt. Die beiden körperlichen Ecken unserer kon-

vexen Vielflache erster Art sind also nicht nur kongruent, sondern können auch auf drei verschiedene Arten zur Deckung gebracht werden. Nach dem zweiten Hilfssatze müssen diese körperlichen Ecken drei-, vier- oder fünfseitige sein; in jedem dieser drei Fälle ist aber eine dreifache Koinzidenz nur dann möglich, wenn die Seitenflächen zueinander kongruent und gleich geneigt sind. Alle Flächen, die an einer Ecke der Vielflache erster Art zusammenstoßen, können also zur Deckung gebracht werden; da aber die Koinzidenz dieser beiden Vielflache dadurch erreicht werden kann, daß man eine beliebige Ecke des einen mit einer bestimmten Ecke des andern zur Deckung bringt, so können zwei entsprechende Seitenflächen beider Körper so zum Zusammenfallen gebracht werden, daß zwei beliebige ihrer Ecken aufeinanderfallen. Hieraus folgt aber, daß die Seitenflächen regelmäßige Vielecke sind, und mithin genügt das konvexe Vielflach erster Art den drei Bedingungen, die das regelmäßige Vielflach definieren, womit der Satz bewiesen ist.

Zweiter Satz. Es gibt nur vier Vielflache höherer Art.

Um die regelmäßigen Vielflache höherer Art zu erhalten, muß man auf Grund des vorhergehenden Satzes offenbar die regelmäßigen Vielflache erster Art nehmen und in folgender Weise verfahren [**81**]. Man wählt auf einem dieser Vielflache eine Ecke aus und untersucht, ob andere Eckpunkte vorhanden sind, die, mit ihr verbunden, ein regelmäßiges Vieleck bilden. Nur ein so gebildetes Vieleck kann möglicherweise Seitenfläche eines Vielflachs höherer Art sein, das dieselben Eckpunkte, wie das gegebene, besitzt. Die Anzahl der kongruenten Vielecke, zu denen ein und derselbe Eckpunkt gehört, gibt an, wievielseitig jede körperliche Ecke des neuen Vielflachs ist.

Wendet man diese Konstruktion auf das Tetraeder an, so erhält man offenbar nichts.

Jede Ecke des Oktaeders gehört zwei Quadraten an, die augenscheinlich nicht die Flächen eines Vielflachs bilden können.

Jeder Eckpunkt des Würfels bestimmt mit zwei andern passend gewählten Eckpunkten ein gleichseitiges Dreieck, und zwar ist dies auf drei verschiedene Weisen möglich. Diese

drei Dreiecke gehören aber einem regelmäßigen Tetraeder an (Fig. 38)[24].

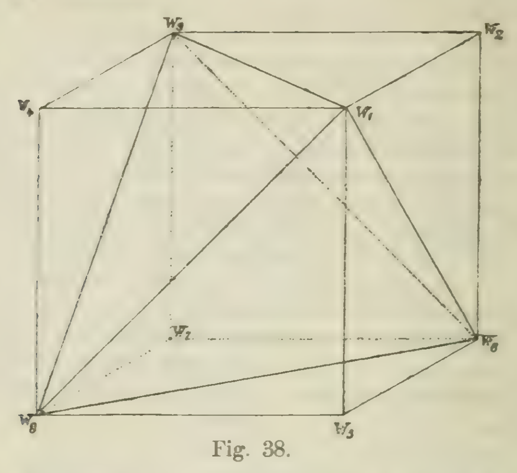


Fig. 38.

Jeder Eckpunkt des regelmäßigen Dodekaeders bestimmt

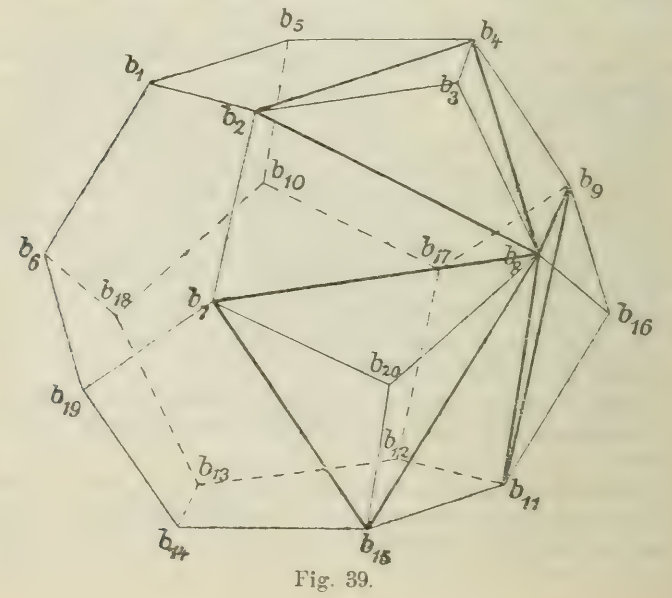


Fig. 39.

drei gleichseitige Dreiecke mit den Eckpunkten, welche je zwei der in dem betrachteten Eckpunkte zusammenstoßenden Seitenflächen angehören (Fig. 39). Die so entstehenden drei Dreiecke bilden aber nicht die Ecke eines Vielflachs, da keine zwei von ihnen eine Kante gemeinsam haben[31].

Jeder Eckpunkt des regelmäßigen Dodekaeders kann aber auch als Ecke von sechs gleichseitigen Dreiecken betrachtet werden, deren andere Ecken in den Seitenflächen, welche den von dem betrachteten Punkte ausgehenden Seitenflächen benachbart sind, liegen. Diese sechs gleichseitigen Dreiecke sind aber die Seitenflächen zweier regelmäßigen Tetraeder (Fig. 40)[27].

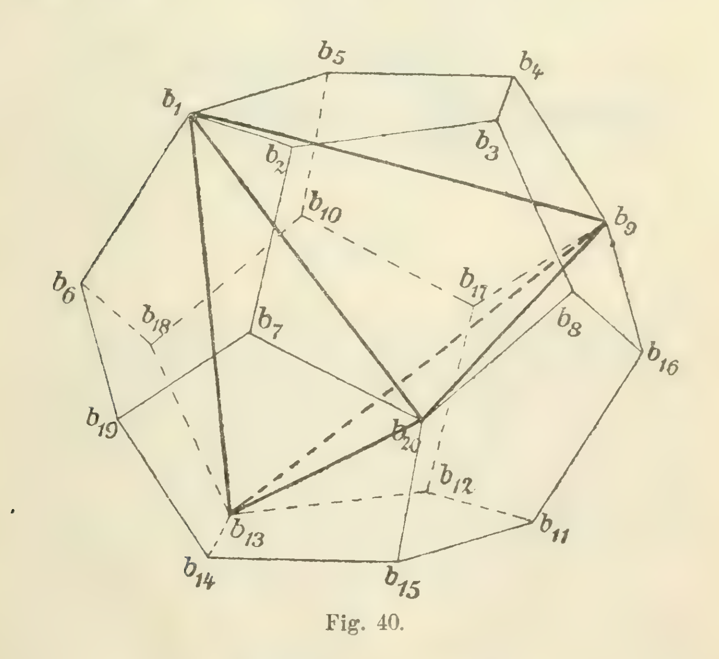


Fig. 40.

Jeder Eckpunkt des regelmäßigen Dodekaeders ist endlich gemeinsame Ecke von drei gewöhnlichen regelmäßigen Fünfecken, deren vier andere Ecken demselben Vielflach angehören. Diese drei Fünfecke können jedoch nicht die Seitenflächen einer dreiseitigen körperlichen Ecke bilden, weil keine zwei

von ihnen eine Kante gemeinsam haben (Fig. 41). Wohl aber liefern die Sternfünfecke, welche dieselben Eckpunkte besitzen, eine dreiseitige körperliche Ecke [16]; die Gesamtheit dieser dreiseitigen Ecken, die man für alle Eckpunkte des ganzen regelmäßigen Dodekaeders erhält, bildet ein *regelmäßiges Dodekaeder vierter Art* (Fig. 42).

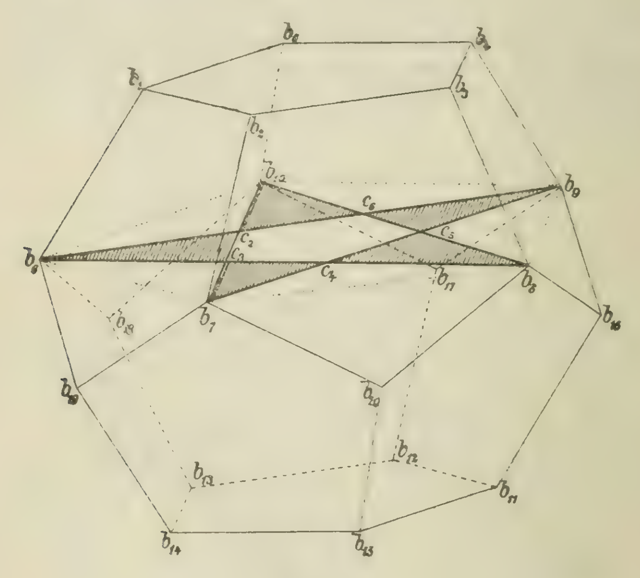


Fig. 41.

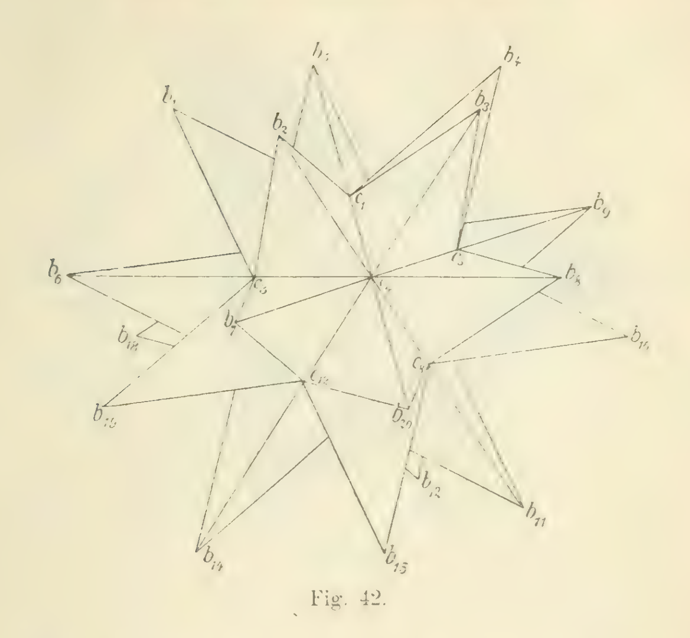


Fig. 42.

Jeder Eckpunkt des **Ikosaeders** ist gemeinsame Ecke von fünf gleichseitigen Dreiecken (Fig. 43), welche diejenigen Geraden zu Seiten haben, die nach den Kanten die kürzesten Verbindungslinien zweier Ikosaederecken*) sind. Diese Dreiecke bilden das **Ikosaeder siebenter Art** (Fig. 44)[14].

Jeder Eckpunkt des Ikosaeders kann auch als gemeinsame Ecke von fünf regelmäßigen Fünfecken erster Art (Fig. 45) betrachtet werden, deren vier andere Ecken ebenfalls dem Ikosaeder angehören. Diese Fünfecke sind die Seitenflächen des **Dodekaeders dritter Art** (Fig. 46)[15].

---

* [d. h. die Verbindungslinien von je zwei, durch eine Ecke getrennten Ikosaederecken.]

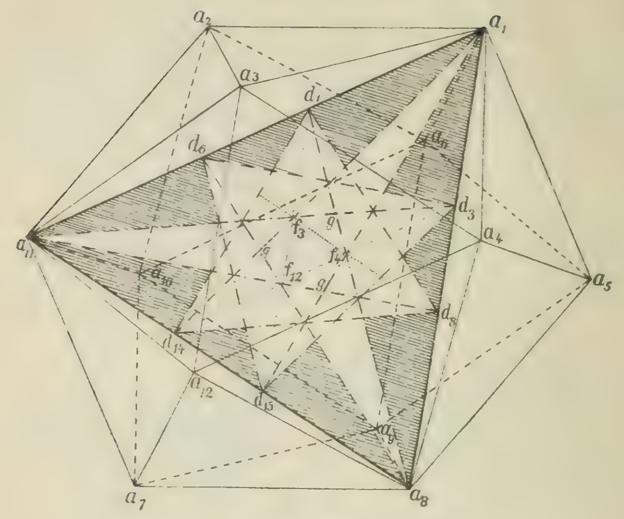

a_2
a_1
a_3
d_1
d_6
d_3
a_4
a_5
a_{11}
f_3
g
f_4
f_{12}
g
a_{10}
d_8
d_{14}
a_{12}
d_{15}
a_9
a_7
a_8

Fig. 43.

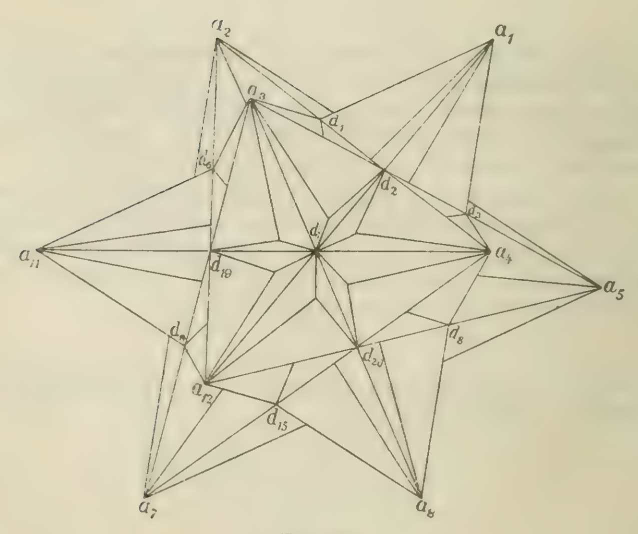

a_2
a_1
a_3
d_1
d_6
d_2
d_3
d_7
a_4
a_5
a_{11}
d_{10}
d_8
d_{20}
a_{12}
d_{15}
a_7
a_8

Fig. 44.

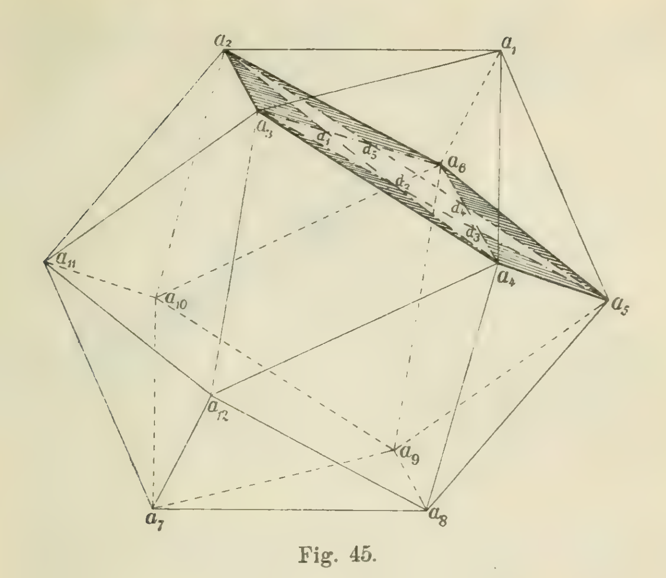


Fig. 45.

Fig. 46.

[**82**] Endlich kann man dieselben Ecken als Ecken von Sternfünfecken (Fig. 47) ansehen [17]), die das Sterndodekaeder zweiter Art bilden (Fig. 48).

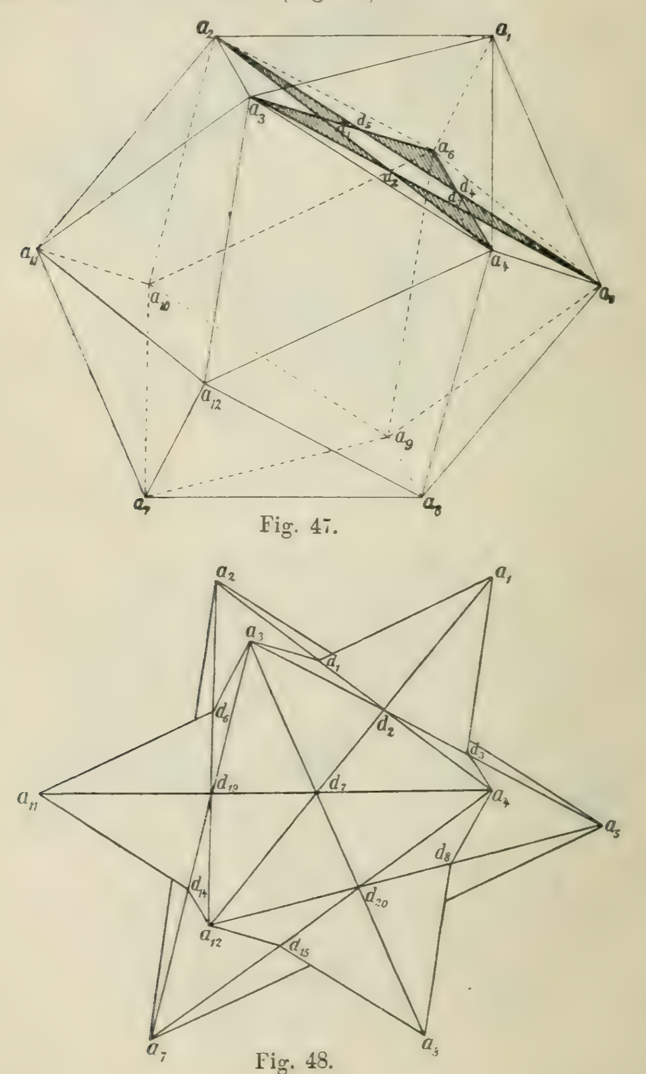


Fig. 47.

Fig. 48.

Im ganzen gibt es also nur vier Sternvielflache, die genau mit den von Poinsot entdeckten übereinstimmen.

In seiner Abhandlung vom Jahre 1809 zeigte Poinsot, wie sehr wahrscheinlich es sei, daß außer den von ihm entdeckten andere regelmäßige Körper nicht existieren. »Wenn z. B.«, sagt *Poinsot* (vgl. S. 42/43), »ein neues regelmäßiges Vielflach mit 28 Seitenflächen existieren, und man die Mittelpunkte aller seiner Seitenflächen bezeichnen würde, so hätte man ebensoviele, regelmäßig über die Kugel verteilte Punkte. Alle diese Punkte könnten dann aber als die Eckpunkte eines nach der gewöhnlichen Definition ganz konvexen Vielflaches angesehen werden. . . . Man vermag nicht einzusehen, warum dieses Vielflach, dessen Ecken gleichmäßig über die Kugelfläche verteilt sind, nicht ein vollkommen regelmäßiges sein sollte. Dann hätte man aber ein regelmäßiges Vielflach der ersten Art, dessen Eckenzahl nicht gleich einer der Zahlen 4, 6, 8, 12, 20 ist; ein solches Vielflach aber ist als unmöglich nachgewiesen.«

Poinsot erkannte also klar, ohne es aber ausdrücklich zu beweisen, daß jedes Vielflach höherer Art zu einem regelmäßigen Vielflache erster Art in enger Beziehung steht. *Cauchy* wies die Richtigkeit dieser Behauptung nach, indem er als das zu einem gegebenen konjugierte Vielflach den konvexen Kern betrachtet, der von den Seitenflächen des ersteren gebildet wird. Ich habe soeben bewiesen, daß das konvexe Vielflach erster Art, das dieselben Eckpunkte wie ein regelmäßiges Sternvielflach besitzt, regelmäßig sein muß. Ein ganz ähnlicher Beweis würde den von *Poinsot* selbst ausgesprochenen Satz streng zu beweisen und zu zeigen gestatten, daß die Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmäßigen Vielflachs ebenfalls ein regelmäßiges Vielflach bilden; hieraus ließe sich dann aber ohne Schwierigkeit ein dritter Beweis des Satzes, dem die vorliegende Mitteilung gewidmet ist, herleiten.

Über Poinsots vier neue regelmäßige Körper.

Von

A. Cayley.

Philosophical Magazine, vol. XVII, pp. 123—128. 1859. Wieder abgedruckt in The collected Mathematical Papers, vol. IV, pp. 81—85. Cambridge, 1891.*)

[**123**] [[**81**]] In seinem »*Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*« (Journ. École Polyt., vol. IV, pp. 16—48. 1810) ist von *Poinsot* bewiesen worden, daß es außer den gewöhnlichen regelmäßigen Vielflachen der Stereometrie noch — natürlich in erweiterter Bedeutung dieses Begriffes — vier neue regelmäßige Vielflache gibt, nämlich ein Ikosaeder, das ich das große Ikosaeder (Nr. 33 jener Abhandlung; S. 35 dieses Bandes) nennen, und drei Dodekaeder, die ich als das große Dodekaeder (Nr. 37; S. 38), das große Sterndodekaeder (Nr. 38; S. 39) und das kleine Sterndodekaeder (Nr. 39; S. 40) unterscheiden werde. [**124**] Die Art der *Poinsot*schen Verallgemeinerung versteht man am besten, wenn man in der von ihm angegebenen Weise das Vielflach so auf eine konzentrische Kugel projiziert, daß die Seitenflächen sphärische Vielecke ergeben. Für die gewöhnlichen Vielflache der Stereometrie beträgt dann die Summe der sphärischen Vieleckswinkel an einem Eckpunkte vier Rechte; in Rücksicht auf die Verallgemeinerung setzen wir diese Summe gleich a-mal vier Rechte. In gleicher Weise bilden bei den gewöhnlichen Vielflachen die Kanten einer Seitenfläche die Sehnen von Zentriwinkeln, deren Summe gleich vier Rechten ist; in Rücksicht auf die Verallgemeinerung setzen wir diese Summe — nämlich dann, wenn die Seitenflächen Sternvielecke

*) Für diese und die folgende Abhandlung sind die Seitenzahlen im *Philos. Mag.* durch [ ] und die Seitenzahlen in *The collected Papers* durch [[ ]] bezeichnet.

sind — gleich a'-mal vier Rechten. Endlich ist die Summe der sphärischen Vielecke gewöhnlich gleich der ganzen Kugeloberfläche; in Rücksicht auf die Verallgemeinerung mag diese Summe gleich B-mal der ganzen Kugeloberfläche sein. (a ist *Poinsots* a; a' kommt bei *Poinsot* nicht vor; und an Stelle von *Poinsots* A ist aus einem später ersichtlich werdenden Grunde B geschrieben[32].)

Die neuen Vielflache sind folgendermaßen konstruiert.

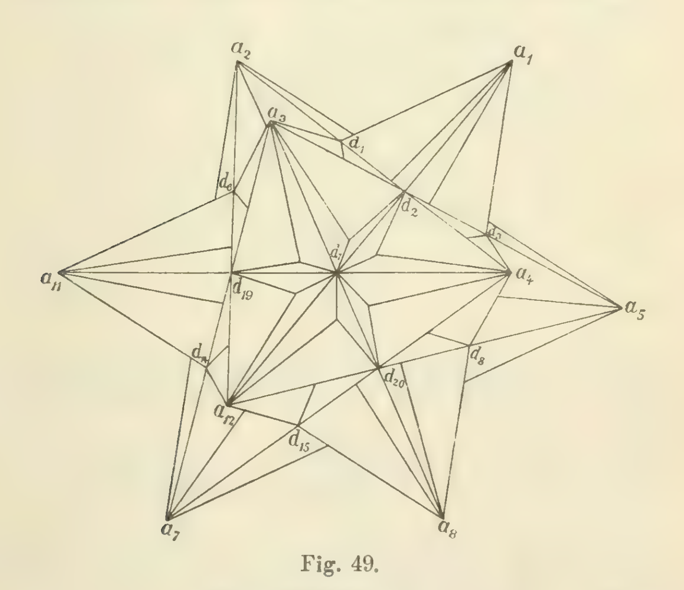


Fig. 49.

1. Das große Ikosaeder (Fig. 49). Jede sphärische Seitenfläche setzt sich zusammen aus sieben oder richtiger vier

ganzen und sechs halben sphärischen Flächen des gewöhnlichen Ikosaeders so, wie es die Fig. 50 zeigt[33]). Wie bei dem ge-

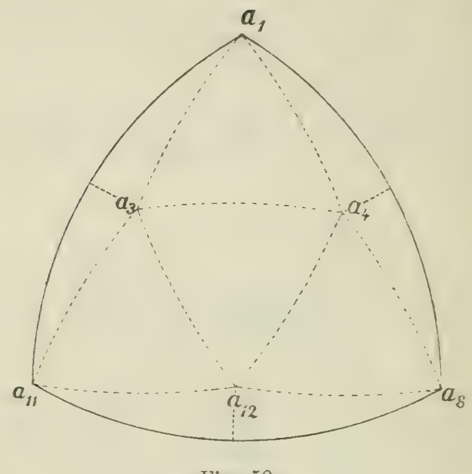


Fig. 50.

wöhnlichen Ikosaeder liegen an jeder Ecke fünf Winkel; ihre Summe beträgt aber nicht vier, sondern acht Rechte, d. h. es ist

$$a = 2.$$

Jedoch ist, wie bei dem gewöhnlichen Vielflach, [[**82**]]

$$a' = 1.$$

Die Summe aller sphärischen Seitenflächen ist offenbar gleich siebenmal der ganzen Kugeloberfläche, oder

$$B = 7. \quad (\text{Auch } A = 7.)$$

2. Das große Dodekaeder (Fig. 51). Jede sphärische Seitenfläche setzt sich so, wie es Fig. 52 zeigt, aus fünf des gewöhnlichen Ikosaeders zusammen. An jeder Ecke liegen fünf Winkel, deren Summe acht Rechte beträgt, d. h. es ist

$$a = 2.$$

Wie bei dem gewöhnlichen Vielflach ist

$$a' = 1.$$

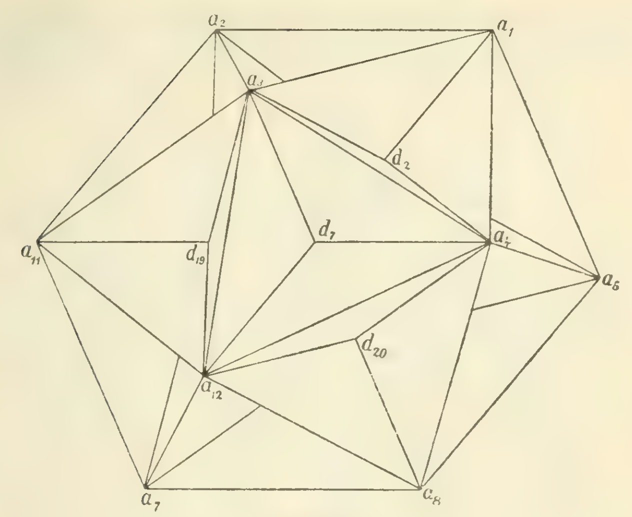


Fig. 51.

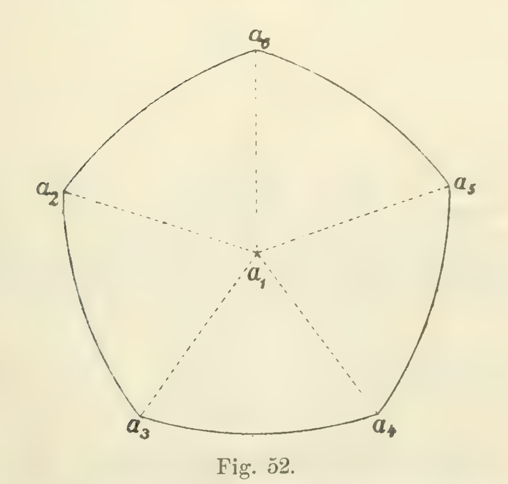


Fig. 52.

Die Summe aller sphärischen Seitenflächen beträgt augenscheinlich $12 \times \frac{5}{20}$ der Kugeloberfläche, das ist dreimal die ganze Kugeloberfläche, also

$$B = 3. \quad (\text{Auch } A = 3.)$$

3. Das große Sterndodekaeder (Fig. 53). Jede sphä-

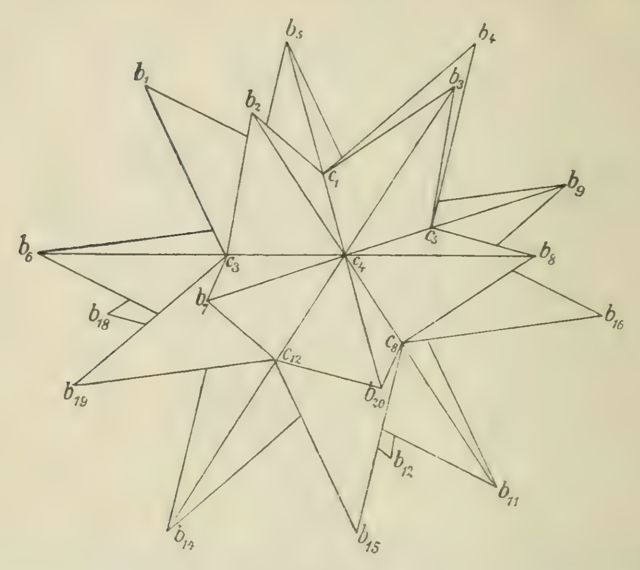


Fig. 53.

rische Seitenfläche wird in der durch die Fig. 54 veranschaulichten Weise von der Sternfigur gebildet, zu der man eine sphärische Seitenfläche des großen Dodekaeders ergänzen kann. [**125**] An jeder Ecke liegen, wie bei dem gewöhnlichen [[**83**]] Dodekaeder, drei Winkel und ihre Summe ist gleich vier Rechten, oder

$$a = 1.$$

Wegen der Sternfigur ist

$$a' = 2.$$

Jeder der vorspringenden Teile der Seitenfläche ist gleich dem dritten Teile der sphärischen Seitenfläche des gewöhnlichen Ikosaeders. Rechnet man als Flächeninhalt des Sternfünfecks den Flächeninhalt des inneren Fünfecks vermehrt um den Flächeninhalt der vorspringenden Teile, so ist der Inhalt einer Seitenfläche gleich $5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$ des Inhalts einer sphärischen

Fläche des gewöhnlichen Ikosaeders; die Summe aller Flächen ist mithin gleich viermal der Kugeloberfläche, und demgemäß setzt *Poinsot*

$$A = 4.$$

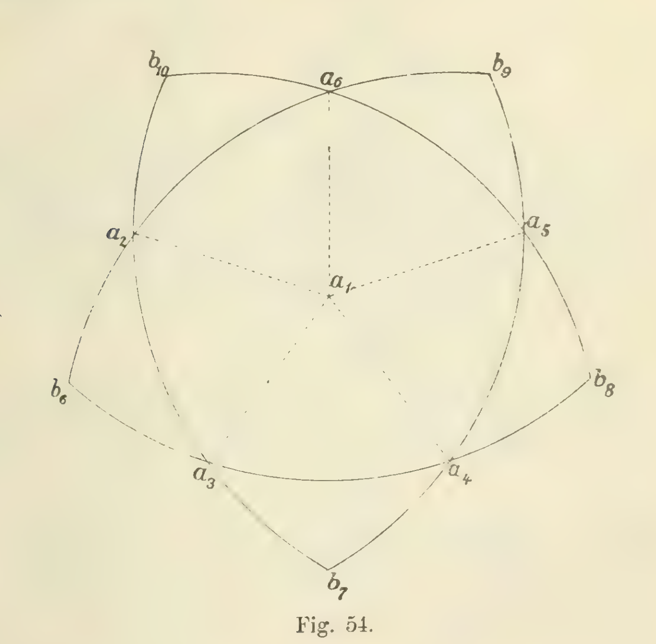


Fig. 54.

Wenn man jedoch — und dies scheint empfehlenswerter zu sein — als Flächeninhalt des Sternfünfecks den fünffachen Inhalt eines Dreiecks rechnet, dessen Spitze in dem Mittelpunkte der Fläche, und dessen Grundlinie mit einer ihrer Seiten zusammenfällt — oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man als Inhalt des Sternfünfecks den doppelten Inhalt des inneren Fünfecks vermehrt um den Inhalt der vorspringenden Teile rechnet, so ist der Inhalt einer Seitenfläche gleich $10 + \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$ der Seitenfläche des gewöhnlichen Ikosaeders[34]; die Summe aller sphärischen Seitenflächen ist folglich gleich siebenmal der ganzen Kugeloberfläche, oder

$$B = 7.$$

4. Das kleine Sterndodekaeder (Fig. 55). Jede

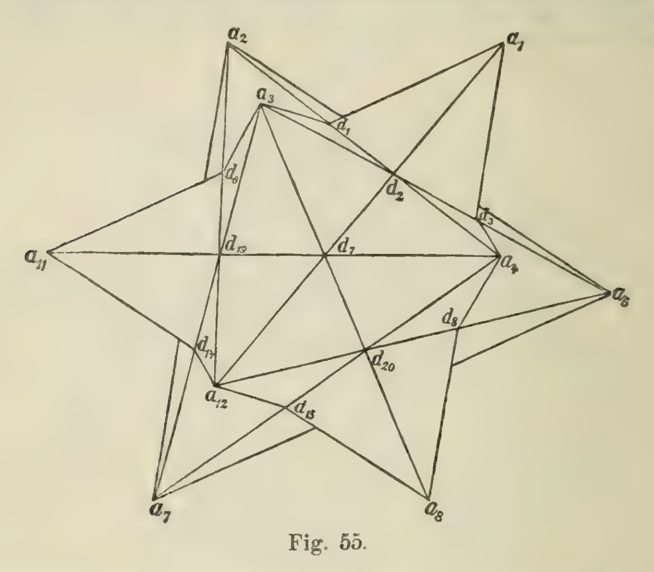


Fig. 55.

sphärische Seitenfläche wird in der durch die Fig. 56 veranschaulichten Weise von der zu einem Stern ergänzten sphäri-

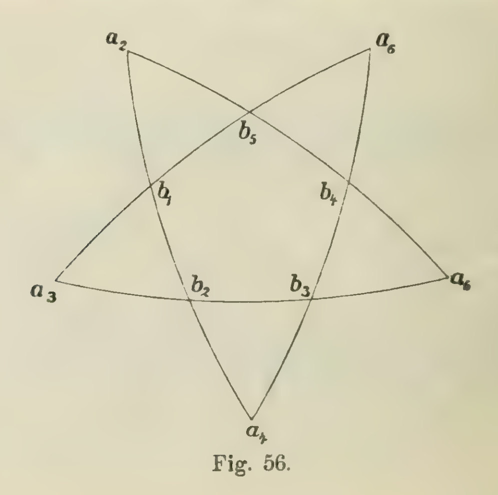


Fig. 56.

rischen Seitenfläche des gewöhnlichen Dodekaeders gebildet. An jeder Ecke liegen fünf Winkel, und ihre Summe ist gleich vier Rechten, oder

$$a = 1.$$

Wegen der Sternfigur ist

$$a' = 2.$$

Der Flächeninhalt jedes vorspringenden Teils ist gleich dem fünften Teile des inneren Fünfecks oder der Seitenfläche des gewöhnlichen Dodekaeders. Demgemäß ist nach dem ersten Verfahren, den Flächeninhalt der Sternfigur zu messen, derselbe gleich dem doppelten Inhalte der Seitenfläche des gewöhnlichen Dodekaeders, und die Summe aller Seitenflächen ist gleich der doppelten Kugeloberfläche, weshalb *Poinsot*

$$A = 2$$

setzt. Berechnet man aber nach dem zweiten Verfahren den Inhalt des Sternfünfecks, so ist er gleich dem dreifachen Inhalte der Fläche des gewöhnlichen Dodekaeders; die Summe aller sphärischen Seitenflächen ist gleich dem Dreifachen der ganzen Kugeloberfläche, oder es ist

$$B = 3.$$

[**126**] Wir stellen jetzt die folgende Tafel auf, die sowohl die gewöhnlichen fünf Körper als auch die *Poinsot*schen enthält. Es bezeichnet

F die Anzahl der Flächen,
E die Anzahl der Ecken,
K die Anzahl der Kanten,
n die Anzahl der Seiten einer Fläche,
n' die Anzahl der Seitenflächen (Winkel) an einer Ecke.
a: die Winkel an einer Ecke betragen zusammen a-mal vier Rechte;
a': die Winkel, die im Mittelpunkte einer Fläche über ihren Seiten als Sehnen stehen, betragen zusammen a'-mal vier Rechte.
A: [[**84**]] die Seitenflächen überdecken A-mal die Kugeloberfläche, wenn der Inhalt einer sternförmigen Seitenfläche, wie bei *Poinsot*, so berechnet wird, daß jeder Flächenteil nur einfach in Rechnung gestellt wird;

B: die Seitenflächen überdecken B-mal die Kugeloberfläche, wenn als Flächeninhalt einer sternförmigen Seitenfläche die Summe aller Dreiecke berechnet wird, die den Mittelpunkt der Seitenfläche als Spitze und ihre Seiten zu Grundlinien besitzen.

Tafel.

Benennung	F	E	K	n	n'	a	a'	B		A
Tetraeder	4	4	6	3	3	1	1	1		1
Hexaeder	6	8	12	4	3	1	1	1		1
Oktaeder	8	6	12	3	4	1	1	1		1
Dodekaeder	12	20	30	5	3	1	1	1		1
Ikosaeder	20	12	30	3	5	1	1	1		1
Großes Sterndodekaeder	12	20	30	5	3	1	2	7		4
Großes Ikosaeder	20	12	30	3	5	2	1	7		7
Kleines Sterndodekaeder	12	12	30	5	5	1	2	3		2
Großes Dodekaeder	12	12	30	5	5	2	1	3		3

In dieser Tafel sind die Körper, die zueinander polarreziprok sind, paarweise angeordnet: Das Tetraeder ist bekanntlich zu sich selbst reziprok; das Hexaeder und Oktaeder sind zueinander reziprok, und ebenso das Dodekaeder und Ikosaeder. Ferner sind auch das große Sterndodekaeder und das große Ikosaeder, sowie das kleine Sterndodekaeder und das große Dodekaeder zueinander reziprok. **[127]** Die Zahl, die ich mit B bezeichnet habe, ist zu sich selbst reziprok, was für die *Poinsot*sche Zahl A nicht gilt; es ist mir nicht gelungen, A so zu definieren, daß die Definition einer zu ihr reziproken Zahl A' möglich geworden wäre. Möglich mag es vielleicht sein, einstweilen erscheint es jedoch vorteilhafter, die Zahl A ganz zu vermeiden und statt ihrer die Zahl B zu benutzen[35].

Eulers wohlbekannte, auf die gewöhnlichen Vielflache anwendbare Formel lautet

$$E + F = K + 2.$$

Poinsot hat in seiner Abhandlung (vgl. S. 47) durch eine Erweiterung des von *Legendre* für den *Euler*schen Satz gegebenen Beweises die allgemeinere Beziehung

$$aE + F = K + 2A$$

erhalten, [85] welche Formel jedoch nicht auf die beiden Sternvielflache, bei denen a' von Eins verschieden ist, anwendbar ist. Die allgemeine Formel lautet vielmehr

$$aE + a'F = K + 2B$$

und gilt für alle neun Körper. Diese Formel kann aber weiter auf alle regelmäßigen oder unregelmäßigen Vielflache angewendet werden, die so gestaltet sind, daß a für jede Ecke und a' für jede Seitenfläche denselben Wert besitzen. Um diese Behauptung zu beweisen, braucht man nur den *Legendre*schen Beweis noch weiter auszudehnen. Ist für die sphärische Projektion einer beliebigen Seitenfläche — mag sie sternförmig sein oder nicht — die Summe ihrer Winkel gleich s und die Zahl ihrer Seiten gleich n, so ergibt sich ihr Flächeninhalt, nach unserer Art berechnet, (ausgedrückt in Oktanten) gleich

$$s + 4a' - 2n.$$

Nun ist die Summe aller Seitenflächen gleich B-mal der Kugeloberfläche, also gleich $8B$. Die Summe aller einzelnen Glieder s ist aber gleich der Summe der Winkel um alle Ecken, also gleich $4aE$; die Summe aller einzelnen Glieder $4a'$ ist gleich $4a'F$, und die Summe aller Glieder $2n$ ist gleich der vierfachen Anzahl der Kanten, mithin gleich $4K$. Folglich erhält man

$$4aE + 4a'F - 4K = 8B$$

oder

$$aE + a'F = K + 2B.$$

Bezeichnet man die Ecken und Flächen mit Buchstaben, so sind — wie ich noch bemerke — die Bezeichnungen für das kleine Sterndodekaeder und das große Dodekaeder vollkommen identisch; bezeichnet man ihre Ecken mit a, b, c, d.

e, f, g, h, i, j, p, q und ihre Flächen mit $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, P, Q$, so wird der Zusammenhang der Ecken und Flächen beider Körper durch die folgenden Tafeln gegeben:

$a\ b\ c\ d\ e = P$	$A\ C\ E\ B\ D = p$
$p\ b\ i\ h\ e = A$	$P\ I\ E\ B\ H = a$
$p\ c\ j\ i\ a = B$	$P\ J\ A\ C\ I = b$
$p\ d\ f\ j\ b = C$	$P\ F\ B\ D\ J = c$
$p\ e\ g\ f\ c = D$	$P\ G\ C\ E\ F = d$
$p\ a\ h\ g\ d = E$	$P\ H\ D\ A\ G = e$
$j\ c\ d\ g\ q = F$	$J\ D\ Q\ C\ G = f$
$f\ d\ e\ h\ q = G$	$F\ E\ Q\ D\ H = g$
$g\ e\ a\ i\ q = H$	$G\ A\ Q\ E\ I = h$
$h\ a\ b\ j\ q = I$	$H\ B\ Q\ A\ J = i$
$i\ b\ c\ f\ q = J$	$I\ C\ Q\ B\ F = j$
$f\ g\ h\ i\ j = Q$	$F\ H\ J\ G\ I = q$

[**128**] Es verdient beachtet zu werden, daß in jeder der beiden Tafeln jedes Paar nicht benachbarter Elemente einer beliebigen fünfgliedrigen Gruppe einmal und nur einmal als ein Paar nicht benachbarter Elemente in einer andern fünfgliederigen Gruppe vorkommt. Die Beschränkung, daß ein Paar nicht benachbarter Elemente einer Gruppe mit beliebig vielen Gliedern in keiner andern Gruppe weder als Paar benachbarter noch nicht benachbarter Elemente vorkommt (vgl. meine Mitteilung, die ich *Kirkmans* Abhandlung »*On Autopolar Polyhedra*« hinzugefügt habe, Phil. Trans. p. 183[36]) gilt nur für die gewöhnlichen Vielflache, nicht für die hier betrachteten.

2, Stone Buildings, W.C., Januar 13, 1859.



Zweite Mitteilung

über

Poinsots vier neue regelmäßige Vielflache.

Von

A. Cayley.

(Philosphical Magazine, vol. XVII, pp. 209—210. 1859. Wieder abgedruckt in The collected Mathematical Papers, vol. IV, pp. 86—87. Cambridge 1891.)

[**209**] [[**86**]] Die Mitteilung über *Poinsots* vier neue regelmäßige Vielflache (Februarnummer, S. 123) hatte ich geschrieben, ohne daß mir *Cauchys* erste Abhandlung »*Recherches sur les Polyèdres*« (Journ. Polyt., vol. IX, pp. 68—86, 1813), deren erster Teil sich auf *Poinsots* Vielflache bezieht, bekannt war. *Cauchy* betrachtet nicht die Projektionen dieser Vielflache auf die Kugel, sondern die Vielflache selbst und zeigt in elegantester Weise, daß alle solche Vielflache sich aus den gewöhnlichen Vielflachen durch Verlängerung ihrer Kanten oder Flächen ableiten lassen müssen. Das reziproke Verfahren würde darin bestehen, die Kanten zu verlängern oder die Ecken zu verbinden; benutzt man dieses Verfahren, und projiziert die Figur auf die Kugel, so erhält man die von *Poinsot* benutzte Methode, die ich in meiner ersten Abhandlung auseinandergesetzt und benutzt habe. *Cauchy* betrachtet gar nicht *Poinsots* verallgemeinerte Gleichung

$$aE + F = K + 2A,$$

noch weniger natürlich die von mir gegebenen Verallgemeinerung

$$aE + a'F = K + 2B.$$

Der zweite Teil von *Cauchys* Abhandlung enthält vielmehr eine Verallgemeinerung der ursprünglichen *Euler*schen Gleichung

$$E + F = K + 2$$

in anderer Richtung; *Cauchys* Satz (S. 63) lautet nämlich:

»Zerlegt man ein Vielflach dadurch in eine beliebige Anzahl anderer Vielflache, daß man in seinem Innern beliebig viele neue Eckpunkte annimmt, und bezeichnet man mit P die Anzahl aller so entstandenen neuen Vielflache, mit E die Gesamtzahl der Ecken, also einschließlich der Ecken des ursprünglichen Vielflachs, mit F die Gesamtzahl der Flächen und mit K die Gesamtzahl der Kanten, so ist

$$E + F = K + P + 1;$$

d. h. die Summe gebildet aus der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen [**210**] übertrifft die aus der Anzahl der Kanten und der Anzahl der Vielflache gebildete Summe um Eins.«

Für $P = 1$ erhält man die *Euler*sche Gleichung

$$E + F = K + 2$$

und für $P = O$ eine Gleichung, die sich auf die Zerlegung eines Vielecks bezieht. Zerlegt man nämlich ein Vieleck in F Vielecke, und bezeichnet E die Anzahl aller Ecken, K die Anzahl aller Seiten, so ist

$$E + F = K + 1.$$

Von dieser Formel kann man wieder leicht zu der *Euler*schen Gleichung für Vielflache

$$E + F = K + 2$$

gelangen. [[**87**]] Ersetzt man in der Gleichung

$$E + F = K + 1,$$

in Analogie mit der *Cauchy*schen Bezeichnung für die Vielflache, F durch P, so erhält man für ein einfaches Vieleck

$$K = E$$

und für die Zerlegung eines Vielecks

$$K = E + P - 1;$$

welche Gleichungen dem *Euler*schen Satze für ein einfaches Vielflach

$$E + F = K + 2$$

und dem *Cauchy*schen Satze über die Zerlegung eines Vielflachs

$$E + F = K + 2 + (P - 1)$$

entsprechen.

Cauchys zweite Abhandlung (Journ. Polyt., vol. IV, pp. 87—98) enthält einen sehr schönen Beweis des in der neunten Definition des elften Buches von *Euklid* enthaltenen Satzes: Zwei konvexe Vielflache sind gleich, wenn sie von derselben Anzahl einander gleicher Seitenflächen begrenzt sind.

2, Stone Buildings, W.C., Februar 1, 1859.



Anmerkungen.

> Mephistopheles: Gesteh' ich's nur! Daß ich hinausspaziere,
> Verbietet mir ein kleines Hindernis.
> Der Drudenfuß auf eurer Schwelle.
> Faust: Das Pentagramma macht dir Pein?
>
> Goethe, Faust, 1. Teil.

Als geheimnisvolles Zeichen, sei es als Erkennungszeichen einer Schule, als welches es z. B. den Pythagoräern gedient haben soll, sei es als mystisches Zeichen, dem magische Kräfte innewohnen, wie es *Goethes* Verse andeuten, ist das Sternfünfeck von alters her bekannt. Daß sich daher schon bei mathematischen Schriftstellern des Altertums und frühen Mittelalters das Sternfünfeck und andere Sternvielecke gezeichnet und auch gelegentlich mathematische Betrachtungen über sie finden, ist selbstverständlich, und es bietet nur geringes Interesse dar, festzustellen, bei welchem Schriftsteller zuerst sich Sternfiguren finden. Wohl aber ist es von Wichtigkeit, zu erforschen, welcher Schriftsteller zuerst das Wesen der Sternvielecke richtig erkannt hat.

Dieses Verdienst muß meines Erachtens für den hervorragenden englischen Mathematiker des 14. Jahrhunderts, *Bradwardinus*, in Anspruch genommen werden, der die regelmäßigen Sternvielecke höherer Art aus denen niederer Art durch Verlängerung der Seiten erzeugt und ihre Winkelsumme als Summe der an den Ecken liegenden spitzen Winkel richtig bestimmt, ohne aber eine allgemeine Formel dafür aufzustellen (*Cantor*, *Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1892. Bd. II, S. 104). Nicht unerwähnt soll bleiben, daß bereits im 13. Jahrhundert *Campanus* die Winkelsumme des Sternfünfecks richtig zu zwei Rechten bestimmt hat (*Cantor*, a. a. O., Bd. II, S. 93). Gleiche Untersuchungen sind dann von *Regiomontanus* und *Bouvelles* (*Cantor*, a. a. O., Bd. II, S. 254 und 350) angestellt. Den Begriff eines Vieleckes, dessen Perimeter sich selbst schneidet, stellt dann *Ramus* in seinem *Scholarum*

mathematicum libri unus et triginta (Basileae 1569, S. 186) genau fest. In *Keplers* Jugendarbeit *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium celestium* (1596) findet man ein regelmäßiges 40-Eck 13ter Art, dessen Ecken in der Reihenfolge, wie sie beim Durchlaufen seines Umfanges aufeinanderfolgen, bezeichnet sind; eine systematische Behandlung der regelmäßigen Sternvielecke gibt *Kepler* dann in seinen berühmten *Harmonice mundi libri V* (1619). Die von *Albert Girard* (vgl. *Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wiss.*, Leipzig 1876, S. 18) skizzierten Gedanken über beliebige Vielecke sind erst von dem bedeutenden Göttinger Mathematiker *A. L. F. Meister* aufgenommen und ausgebaut. Seine Abhandlung *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus* (Novi Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis, 1771, t. I., p. 144—180) enthält bereits alle die allgemeinen Begriffe und Festsetzungen, welche *Poinsot* in dem ersten Teile seiner in diesem Bändchen enthaltenen Abhandlung von neuem aufstellt; er führt Flächenteile mit positivem und negativem Inhalte ein und bestimmt dadurch den Flächeninhalt eines Sternvielecks in richtiger Weise, in welchem Punkte er *Poinsot* noch überlegen ist (vgl. Anmerkung 13). Leider sind *Meisters* Untersuchungen lange Zeit unbeachtet geblieben, und fast alle seine Gedanken sind von späteren Forschern neu konzipiert worden, ehe ihm die gebührende Anerkennung zuteil wurde. Noch in der geschichtlichen Würdigung der Göttinger Mathematiker des 18. Jahrhunderts von *Conrad H. Müller* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 18. Heft; Leipzig 1904) scheint mir *Meisters* Bedeutung nicht genügend hervorgehoben zu sein*).

Noch mancher andere Mathematiker ließe sich nennen, der sich ebenfalls mit der Lehre von den Sternvielecken beschäftigt hat, aber diese Arbeiten bieten nicht durchgängig Fortschritte dar, sondern man findet vielmehr öfter ein Rückwärtsschreiten insofern, als an einem Sternvieleck nicht nur die an den Ecken, sondern auch die an den Doppelpunkten liegenden als Vieleckswinkel aufgefaßt werden. Der seinen Kollegen *Meister* gegenüber so viel genannte *Kästner* macht (*Geschichte der Mathe-*

*) Auch auf die *Commentatio de solidis geometricis* Nov. Comm. Soc. Reg. Sc. Gott. 1785, t. VII, sei hier aufmerksam gemacht.

matik. 1799, Bd. III. S. 201) *Ramus* wegen seiner richtigen Auffassung der Sternvielecke noch den Vorwurf mangelnder Scharfsichtigkeit.

Sind also der größere Teil von *Poinsots* Ergebnissen über die Sternvielecke nur Wiederentdeckungen der ihm unbekannt gebliebenen *Meister*schen Resultate, so bleibt ihm, wenn er hauptsächlich auch nur die regelmäßigen Vielecke untersucht, das unbestrittene Verdienst, eine allgemeine Terminologie geschaffen und zum ersten Male die Anzahl der Arten eines regelmäßigen m-Ecks, die kontinuierliche Vielecke ergeben, bestimmt, hiermit also eine Verknüpfung von Zahlentheorie und Geometrie hergestellt zu haben. Weitergehende historische Angaben finden sich in den schon genannten *Vermischten Untersuchungen zur Geschichte der math. Wiss.* von *S. Günther*, in dessen erstem Kapitel »die geschichtliche Entwicklung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit«, ausführlich behandelt ist, und in der ganz vorzüglichen Monographie von *M. Brückner*, *Vielecke und Vielflache*. Theorie und Geschichte (Leipzig 1900); beiden Werken sind zahlreiche der vorstehend gegebenen Daten entnommen. Das letztere Werk ist jedem unentbehrlich, der sich mit der Lehre von den Vielecken und den Vielflachen beschäftigt; dort (S. 12—16, 20—22, 43) findet man auch die wichtigsten Arbeiten zur Vieleckslehre bis zur Gegenwart gewürdigt. —

Wie die Sternvielecke, so war vielleicht auch das eine oder andere der regelmäßigen Sternvielflache zuerst nur Schöpfung künstlerischer Phantasie, ehe die mathematische Forschung zu diesen Körpern führte. Jedenfalls gilt dies für das Vielflach, das *Günther* (a. a. O., S. 36) aus der *Perspectiva Corporum Regularium* von *Wenzel Jamitzer* (Nürnberg, 1568) abgebildet und als *Poinsot*sches Dodekaeder der dritten Art (vgl. Taf. I) angesehen hat. Nach *Günthers* Abbildung zu urteilen, ist dies aber nicht richtig, da die den Doppelkanten des Dodekaeders dritter Art (z. B. a_4 d_7 d_{19} a_{11} in Fig. 18) entsprechenden Linien gebrochene Linien sind; es stellt die Abbildung nur ein Ikosaeder vor, auf dessen Seitenflächen nach innen dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Das gleiche Urteil fällt *Brückner* (a. a. O., S. 176).

Erst in *Keplers* schon genannten *Harmonice mundi libri* finden sich die richtigen Abbildungen zweier regelmäßigen Sternvielflache, der Sterndodekaeder 3. und 7. Art (Taf. II), und zum Beweise, daß *Kepler* sie auch richtig aufgefaßt hat,

mag die betreffende Stelle (*Opera omnia*, ed. *Frisch*, Frankfurt 1864; vol. V., p. 122) hier in freier Übersetzung folgen:

»Satz 26. *Zu den vollkommensten regelmäßigen Körpern müssen noch zwei weitere hinzugerechnet werden, die von zwölf Sternfünfecken begrenzt sind,* . . . .

Es begrenzen nämlich Sternfünfecke nach allen Seiten körperliche Gebilde, die in Spitzen auslaufen; der eine dieser Körper wird von zwölf fünfkantigen, der andere von zwanzig dreikantigen Ecken gebildet. Stellt man beide Körper auf eine Unterlage, so ruht der letztere auf drei Ecken (wie in Fig. 22 auf den Ecken a_7, a_8, a_9), *der erstere aber auf fünf Ecken* (wie in Fig. 20 auf den Ecken b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}); *jener wird schöner auf eine Ecke gestellt* (so daß also z. B. die Achse $a_1 a_7$ in Fig. 22 vertikal steht), *dieser ruht richtiger auf fünf Ecken. Von außen betrachtet scheinen diese Körper keine regelmäßig gestalteten Seitenflächen, sondern gleichschenklige Dreiecke als solche zu besitzen; je fünf solcher Dreiecke jedoch liegen in einer und derselben Ebene und umgeben ein unter einer* (oder mehreren) *körperlichen Ecken gleichsam als ihr Herz verborgenes Fünfeck* (vgl. Fig. 21 und 19), *mit dem zusammen sie einen sogenannten fünfeckigen Stern oder — mit dem deutschen Namen — Drudenfuß, bei Theophrastus Paracelsus das Zeichen der Gesundheit**), *bilden. Diese Körper sind gewissermaßen in derselben Weise aufzufassen, wie ihre Seitenflächen. Wie nämlich bei einer Seitenfläche, d. h. bei einem fünfeckigen Stern immer die Schenkel von je zwei Dreiecken in eine Gerade fallen, deren dazwischen gelegener innerer Teil Grundlinie eines dritten Dreiecks und Seite des inneren Fünfecks ist, so liegen bei den beiden Körpern immer fünf, zu fünf verschiedenen Ecken gehörige gleichschenklige Dreiecke in einer Ebene und umgeben als innerstes Mark oder Herz des Sternes ein Fünfeck, über dem bei dem einen Körper* (Sterndodekaeder 3. Art) *eine, bei dem anderen* (Sterndodekaeder 7. Art) *fünf körperliche Ecken stehen. Die Verwandtschaft dieser Körper einerseits mit dem Dodekaeder, andererseits mit dem Ikosaeder, ist aber so groß, daß diese letzteren, vornehmlich aber das Dodekaeder, gleichsam als Stumpfe oder Verstümmelungen der mit den Spitzen versehenen Körper erscheinen* (vgl. Fig. 27 und 30).

---

*) *Günther* hat für diese Angabe *Keplers* in der Gesamtausgabe der Werke des *Theophrastus* keinen Beleg finden können.

Kepler gibt mehrere Abbildungen dieser Sternkörper, die den verschiedenen oben erwähnten Stellungen entsprechen (a. a. O., S. 120 und 272), aber nur geringe Drehungen in ihrer Stellung gegen die in diesem Bändchen befindlichen Abbildungen aufweisen. Seine letzten Worte zeigen, daß er die *Cauchy*sche Art der Erzeugung beider Sternvielflache aus dem Dodekaeder klar erkannt hat.

Ganz unabhängig von *Kepler* hat dann *L. Poinsot** in der ersten Abhandlung dieses Klassiker-Bändchens alle vier regelmäßigen Sternvielflache neu entdeckt und ihr Wesen richtig erkannt. Da er aber nicht konsequent dasselbe Verfahren zur Ableitung aller vier Sternkörper benutzt, sondern für die beiden letzten eine andere Methode als für die ersten zwei benutzt, so gelingt es ihm nicht, den Nachweis zu erbringen, daß es nur diese vier kontinuierlichen regelmäßigen Vielflache höherer Art gibt, so nahe er in seinen Betrachtungen (Nr. 40—44) den Sätzen kommt, die den Beweisen von *Cauchy* und *Bertrand* als Ausgangspunkt dienen. Infolge seiner unrichtigen Bestimmung des Flächeninhaltes von Sternvielecken kommt er zu einer unrichtigen Artbestimmung und Benennung seiner beiden letzten Sternvielflache. Da aber *Poinsots* Benennungen kurz und bezeichnend sind, so habe ich sie in den Anmerkungen beibehalten, nur die richtige Art hinzugefügt (vgl. S. 104). — Wegen der Verallgemeinerung der *Euler*schen Gleichung sei auf die Anmerkung 21 verwiesen.

Über die Frage, ob *Poinsot* bei Abfassung seiner Abhandlung die *Kepler*sche Entdeckung gekannt hat, war ein lebhafter Meinungsaustausch entstanden. Einerseits wurde *Poinsot* fast des Plagiats beschuldigt, da er eine Stelle aus *Keplers Harmonice mundi libri*, die dem von den Sternvielecken handelnden Satze vorangeht, in der Anmerkung auf S. 44/45 zitiert, ohne *Keplers* Entdeckung selbst zu erwähnen; andrer-

* *Louis Poinsot*, geb. 3. Jan. 1777 und gest. 5. Dez. 1859 in Paris. Er war 1794—1797 Schüler der École polytechnique, von 1809 bis 1816 Professor der Analysis und Mechanik an derselben, und von 1816—1825 Examinateur d'admission, dann Mitglied des Conseil supérieur de l'instruction publique. 1813 war er Mitglied des Instituts geworden, 1852 wurde er von Napoleon III. zum Senator ernannt. — Infolge eines durch das Journal de l'École polytechnique veranlaßten Irrtums ist in der Überschrift und den Kolumnentiteln der *Poinsot*schen Abhandlung statt *L.* leider *M. Poinsot* gedruckt.

seits wurde behauptet, daß *Kepler* beide Sternkörper nur zufällig gezeichnet habe. Beides ist unrichtig; die letztere Behauptung widerlegen *Keplers* oben angeführte Darlegungen. Aber auch die erste Behauptung ist unrichtig; *Poinsot* hat, wie aus der erwähnten Anmerkung hervorgeht, die *Kepler*schen Worte nicht direkt, sondern nach dem Zitat von *Lidonne* zitiert, und *Keplers* Entdeckung war ihm unbekannt geblieben. (vgl. *M. Simon,* Archiv der Math. u. Phys. [3] Bd. 7, S. 109). Es ist doch schon höchst unwahrscheinlich, daß *Poinsot* überhaupt *Kepler* genannt haben würde, wenn er ein Plagiat hätte begehen wollen.

*A. L. Cauchy**) schafft dann für die von *Poinsot* bei der Ableitung seiner beiden letzten Sternvielflache benutzte Methode die Grundlage und weist nach, daß der Kern jedes regelmäßigen Vielflachs höherer Art ein solches erster Art ist. Auf Grund dieses Satzes leitet er dann die vier *Poinsot*schen Sternvielflache ab und führt so zugleich den noch fehlenden Nachweis, daß es keine weiteren geben kann. Seine Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes geht nach ganz anderer Richtung als die von *Poinsot.*

*J. Bertrand***) gibt den zu dem *Cauchy*schen Beweise polar-reziproken, indem er an Stelle der von *Cauchy* zur Ableitung der Sternvielflache benutzten Flächen des Kernvielflachs die zu ihnen reziproken Ecken des umschriebenen Vielflachs erster Art treten läßt. Die Art der Sternvielflache untersucht er ebensowenig wie *Cauchy.*

*A. Cayley****) endlich, dem bei Abfassung seiner ersten Mitteilung die Abhandlungen von *Cauchy* und *Bertrand*, letztere auch noch bei Abfassung seiner zweiten Mitteilung unbekannt

---

*) *Augustin Louis Cauchy,* geb. 21. August 1789 in Paris, gest. 23. Mai 1857 in Sceaux. Erst Schüler, dann Repetitor und Professor der Mathematik an der École polytechnique. Seit 1816 Mitglied des Instituts und Ingénieur-en-chef des Ponts et Chaussées. Nach der Julirevolution lebte er in Österreich und kehrte erst später wieder nach Paris zurück.

**) *Joseph Louis François Bertrand,* geb. 11. März 1822 und gest. am 2./3. April 1900 in Paris. Zuerst Prof. suppl., seit 1862 ord. Prof. der Mathematik und Physik am Collège de France und am Lycée Napoléon in Paris. Seit 1874 beständiger Sekretär der Akademie.

***) *Arthur Cayley,* geb. 16. Aug. 1821 in Richmond, Surrey, gest. 26. Jan. 1895 in Cambridge. Professor der reinen Mathematik und Fellow am Trinity College in Cambridge.

waren, bestimmt den Flächeninhalt von Sternvielecken und damit die Art der Sternvielflache in richtiger Weise. An Stelle der unrichtigen *Poinsot*schen Benennungen führt er neue ein, die aber nicht gerade glücklich gewählt sind und keinen Anklang gefunden haben.

Die Abhandlungen von *Poinsot*, *Cauchy* und *Bertrand* ermangeln fast aller Figuren und sind infolgedessen nicht leicht verständlich; hierin ist auch der Grund zu suchen, daß das Interesse für die Sternvielecke in weiteren Kreisen erst durch die sofort zu erwähnende Abhandlung von *Chr. Wiener* geweckt wurde. In *Poinsot*s Abhandlungen finden sich nur die Figuren 5—7 und 10 und in *Cayley*s Abhandlung die Figuren 50, 52, 54 und 56 ohne Bezeichnungen; alle übrigen Figuren sind von dem Herausgeber hinzugefügt, so daß nun das Lesen der Abhandlungen selbst keine Schwierigkeiten mehr bietet.

Wiener folgt in seiner Abhandlung *Vielecke und Vielflache* (Leipzig 1894) dem *Bertrand*schen Beweise unter gleichzeitiger Benutzung der *Cayley*schen Resultate. Eine Reihe von Sätzen über beliebige Vielecke und Vielflache verleihen der Abhandlung wichtige Bedeutung auch für die allgemeine Theorie. Für die Lehre von den Sternvielflachen aber bot sie zuerst Zeichnungen und die Netze dar. Die schönen Lichtdruckabbildungen, welche *Wiener* von Modellen dieser Körper gibt, konnten diesem Bändchen als besonders wertvoller Schmuck beigefügt werden. Sowohl den Nachkommen *Wiener*s, als dem *Teubner*schen Verlage sei für ihre liebenswürdige Bereitwilligkeit, mit der sie den Wiederabdruck genehmigten, an dieser Stelle der geziemende Dank gesagt. Die Herstellung von Karton-Modellen der Sternkörper aus ihren Netzen empfiehlt sich nicht, weshalb *Wiener* noch eine zweite Art bespricht, die im wesentlichen auf das *Cauchy*sche Verfahren hinausläuft, indem sie geeignete Pyramiden auf die Flächen von Ikosaeder und Dodekaeder aufsetzt. Nach *Bertrand*s Verfahren lassen sich aus diesen beiden Körpern leicht Fadenmodelle der Sternvielflache bilden.

Wiener hat eine neue Benennung der Sternvielfache eingeführt, die wissenschaftlich streng, aber etwas umständlich im Gebrauche und zum Teil wieder abgeändert ist. Deshalb ist den richtig abgeänderten *Poinsot*schen Bezeichnungen in den Anmerkungen der Vorzug gegeben. Die folgende Tafel gibt eine Zusammenstellung der verschiedenen Benennungen:

Poinsot	*Cayley*	*Wiener*	Anmerk.
Ikos. 7. Art	Großes Ikos.	Sterneckiges 20-Flach	Ikos. 7. Art
Dodek. 3. Art	Großes Dodek.	Sterneckiges 12-Flach	Dodek. 3. Art
Sterndodek. 4. Art	Großes Sterndodek.	20eckiges Stern-12-Flach	Sterndodek. 7. Art
Sterndodek. 2. Art	Kleines Sterndodek.	12eckiges Stern-12-Flach	Sterndodek. 3. Art.

Wegen neuerer Arbeiten, vornehmlich der an anderer Stelle genannten von *Möbius* und *Heß*, sei auf *Brückner* a. a. O., S. 163—179 verwiesen: meistens gehen sie aber weit über die Theorie der regelmäßigen Sternvielfache hinaus.

Spezielle Textanmerkungen.

1) *Zu S. 3.* Da *Gauß' Disquisitiones arithmeticae* (1799. Ges. Werke, Bd. 1) und auch *Legendres Théorie des nombres* bereits erschienen waren, so klingt *Poinsots* Behauptung in bezug auf die Zahlentheorie befremdlich. Hinsichtlich der Analysis situs, wie heute die Situationsgeometrie bezeichnet wird, ist sie sehr berechtigt. Sagt doch *Gauß* noch in einer vom 22. Januar 1833 datierten Notiz: »Von der Geometria situs, die *Leibniz* ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (*Euler* und *Vandermonde*) einen schwachen Blick zu tun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts« (Ges. Werke, Bd. V, S. 605). Reiche Literaturangaben über Abhandlungen aus der Analysis situs finden sich in dem vortrefflichen Werke von *W. Ahrens*, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901, S. 302—316). Besonders mögen noch die ausgezeichneten Untersuchungen von *Listing* hervorgehoben sein.

2) *Zu S. 4.* Die von *Euler* (Histoire de l'académie royale des sciences de Berlin, 1759, t. XV, p. 310) gegebene Lösung ist für die Theorie des Rösselsprunges von grundlegender Bedeutung. Sie ist wieder abgedruckt in *Eulers Commentationes arithmeticae collect.*, Petersburg 1849, t. I, p. 337 und ihrem wesentlichen Inhalte nach wiedergegeben in dem Artikel: »Springer auf dem Schachbrette«, in *Klügels Mathematischem Wörterbuche* und in *Legendres Théorie des*

nombres, 3. éd., t. II, p. 387, in der deutschen Ausgabe von *H. Maser*, Bd. II, S. 146).

Vandermonde legte seinem Verfahren (*Remarques sur les problèmes de situation:* Histoire de l'académie royale des sciences de Paris. 1771, p. 566) die Teilung des Schachbrettes in vier Quadrate zugrunde.

Die Geschichte des Problems des Rösselsprunges, sowie alle bisher gefundenen Lösungen desselben teilt *W. Ahrens* mit (a. a. O., S. 165—208).

Das Brückenproblem ist von *Euler* in der Abhandlung *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae, 1741, t. III, p. 128—140) gelöst worden. Es ist identisch mit der Aufgabe, einen Linienzug in einem fortlaufenden Zuge so zu durchwandern, daß jede Linie nur einmal passiert wird. Hierher gehören also auch die von *Poinsot* in den §§ 18—23 der vorliegenden Abhandlung angestellten Untersuchungen.

Weiteres siehe *Ahrens*, a. a. O., S. 313—326; *Schubert*, Mathematische Musestunden, 2 Aufl., Leipzig 1900, Bd. 3, S. 58—67.

3) *Zu S. 5 (Anmerkung)*. Der Brief von *Leibniz* an *Pierre Rémond de Montmort* ist datiert: Hannover, 17. Januar 1716 und findet sich abgedruckt in *Leibnitii Opera omnia* (herausgegeben von *L. Dutens*), Genf 1768: t. V, continens opera philologica, p. 28 und in *Leibniz*, Philosophische Schriften (herausgegeben von *C. J. Gerhardt*), Berlin 1900, Bd. III, S. 667.

Pierre Rémond de Montmort lebte von 1678—1719 und ist hauptsächlich durch seine Schrift *Essai d'analyse sur les jeux de Hazard* bekannt.

Das Trictrac ist wie die übrigen genannten Spiele ein Brettspiel. Wegen des Solitär- (Einsiedler- oder Nonnen-) Spieles siehe *Ahrens*, a. a. O., S. 94—113.

4) *Zu S. 5 (Anmerkung)*. *L. N. M. Carnot*, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales.* Paris 1806.

5) *Zu S. 7.* *Poinsot* bezeichnet den rechten Winkel stets mit π, wofür ich R gesetzt habe. Es ist merkwürdig, daß *Poinsot* hier den Buchstaben π noch nicht in der jetzt üblichen Bedeutung als Bogenmaß des gestrekten Winkels benutzt, da man zu seiner Zeit sich dem *Euler*schen Vorgange — *William Jones* gleicher Vorschlag (1706) ist unbeachtet geblieben —

fast allgemein angeschlossen hatte. *Euler* hatte diese Bezeichnung zuerst in seinem *Variæ observationes circa series infinitas* (Comment. Acad. Petropol., 1744, t. IX, p. 165) vorgeschlagen. Allgemeinere Annahme fand diese Bezeichnung durch seine *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannæ 1748) und besonders durch *Kästners Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie* . . . (Göttingen; 1. Aufl. 1759; 2. Aufl. 1764), welche in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts das herrschende mathematische Lehrbuch waren. Weiteres über die Einführung von π als Symbol siehe in *Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, Leipzig 1903, Bd. II, S. 134—135. —

Die Regel, die beiden Ufer eines Vielecks durch verschiedene Farben oder durch Schraffierung zu unterscheiden, gibt lange vor *Poinsot* schon *Meister* in seiner (S. 99) genannten Abhandlung. Dies und das früher Gesagte veranschaulichen die Figuren 2 und 4, welche direkt der *Meister*schen Abhandlung entnommen sind; auch die Figuren 3 finden sich dort in ähnlicher Weise.

Nach der von *Poinsot* getroffenen Festsetzung sind in diesen Figuren die Vielecks- oder Innenwinkel die zwischen den schraffierten Ufern gemessenen Winkel, die Außenwinkel deren Ergänzungen zu zwei Rechten. Die von *Poinsot* gegebenen Festsetzungen sind mit den jetzt üblichen, dem Wesen nach, übereinstimmend. Als positiven Umlaufssinn des Vielecks a b c d . . . nimmt er den durch die alphabetische Reihenfolge der Ecken bestimmten und als positiven Drehsinn der Winkel den durch die Festsetzungen über die positiven und negativen Außenwinkel sich ergebenden.

Die Figuren 3, in denen die Außenwinkel bezeichnet sind, zeigen die von *Poinsot* am Ende von § 4 angegebene Konstruktion mit der Abänderung, daß die sämtlichen Außenwinkel nicht in einen Eckpunkt, sondern in einen beliebigen Punkt der Ebene des Vielecks durch gleichgerichtete Parallelen zu den Seiten übertragen sind. Die hierdurch entstehende Figur bezeichnet man nach *Wiener* (*Über Vielecke und Vielflache*, S. 2) als zweite Figur zu dem zugehörigen Vielecke als erster. Links ist diese zweite Figur für ein konvexes, rechts für ein nicht-konvexes Vieleck konstruiert; in der letzteren Figur treten die Parallelen zu den Seiten 2 und 3 als Wendegerade (nach *Wiener*) auf, an deren ersteren der positive Drehsinn der Winkel in den negativen und an deren

zweiten der negative wieder in den positiven Drehsinn umkehrt. Solche Wendegeraden können für jedes Vieleck, wie leicht ersichtlich, nur in gerader Anzahl vorhanden sein; sie sind parallel den Seiten des Vielecks, die eine Ecke mit ausspringendem und eine Ecke mit einspringendem Innenwinkel verbinden.

Es sei noch bemerkt, daß — im Gegensatze zu *Wiener*, welcher die *Poinsot*schen Definitionen von Innen- und Außenwinkel übernommen hat — andere Autoren nur die Definition des Innenwinkels beibehalten haben, als Außenwinkel seine Ergänzung zu $4R$ und als Umfangswinkel den Winkel bezeichnen, um welchen eine Seite in positivem Sinne gedreht werden muß, bis sie mit der positiven Richtung der folgenden Seite zusammenfällt.

6) *Zu S. 10.* Die Artzahl ist bei *Poinsot* — wie aus den §§ 7—14 folgt — identisch mit der Zahl h, deren Produkt mit $4R$ die algebraische Summe der Außenwinkel des Vielecks ergibt. Die Art eines beliebigen Vielecks bestimmt man am bequemsten, indem man sich zu ihm die zweite Figur in der oben angegebenen Weise konstruiert. Beschränkt man sich nicht, wie *Poinsot* es tut, auf regelmäßige Vielecke, deren es nur konvexe geben kann, so erkennt man, daß es auch Vielecke nullter Art, deren Außenwinkelsumme also gleich Null ist, gibt. Vielecke nullter Art können offenbar nie konvex sein.

Die *Poinsot*sche Behauptung auf S. 20, daß es keine geradlinige Figur gibt, deren Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist, gilt daher nur, wenn man sich auf konvexe Vielecke beschränkt.

Heß (*Über gleicheckige und gleichkantige Polygone.* Schriften der Ges. zur Beförderung der ges. Naturwiss. zu Marburg, Kassel 1874, S. 612) versteht unter der Art eines Vielecks die Zahl h', deren Produkt mit $4R$ die Summe seiner Umfangswinkel liefert. Für konvexe Vielecke sind die Umfangswinkel identisch mit den *Poinsot*schen Außenwinkeln, und folglich auch die Artzahlen von *Poinsot* und *Heß*. Für nicht konvexe Vielecke ist $h = h' - k$, wo k die Anzahl der einspringenden Ecken bezeichnet. Die *Poinsot*sche Definition der Artzahl scheint mir mancherlei Vorzüge vor der von *Heß* zu besitzen.

7) *Zu S. 16.* *Poinsot*, *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* (Liouville, Journal de mathématiques, t. X, p. 1—101).

Poinsot benutzt in dieser Abhandlung die (auf den S. 10 und 11 [§ 7] und 21 [§ 17] dieses Bändchens) verwendete doppelte Abzählung von m auf einer Kreisperipherie angeordneten Punkten zu einem äußerst anschaulichen Beweise des Satzes über die Teilbarkeit zweier ganzen Zahlen m und h:

Besitzen m und h den größten gemeinsamen Teiler Θ, so ist $\frac{mh}{\Theta}$ das kleinste Vielfache von h, welches durch m teilbar ist. — Für $\Theta = 1$ erhält man den Euclidischen Fundamentalsatz.

Der für die Summe aller Innenwinkel eines m-Ecks h^{ter} Art auf S. 11 gegebene Ausdruck gilt auch noch, wenn m und h nicht teilerfremd sind. Man muß nur dann als m-Eck h^{ter} Art die sämtlichen $\frac{m}{\Theta}$-Ecke $\left(\frac{h}{\Theta}\right)^{\text{ter}}$ Art betrachten, in welche das m-Eck zerfällt, und deren Anzahl gleich Θ ist. Bei dieser Hinzunahme der diskontinuierlichen m-Ecke gibt es dann für jede gerade Zahl m ein Vieleck $\left(\frac{m}{2} - 1\right)^{\text{ter}}$ Art, deren Winkelsumme $4\,R$ beträgt.

8. *Zu den S. 17—21.* Beachtet man, daß der Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks m^{ter} Ordnung und h^{ter} Art gleich $\frac{m - 2h}{m} \cdot 2\,R$ ist, so folgt für den über einer Seite stehenden Zentriwinkel $\omega_h = \frac{2\,R \cdot 2\,h}{m}$, und folglich ist die Seite dieses Vielecks

$$s_h = 2 \sin \tfrac{1}{2}\,\omega_h = 2 \sin \frac{2\,R \cdot h}{m},$$

wenn der Radius des umschriebenen Kreises als Längeneinheit gewählt wird. Für alle Werte von h ist mithin

$$\sin \frac{m}{2}\,\omega_h = 0.$$

Da nun, wie aus dem *Moivre*schen Satze leicht folgt, für ungerades $m = 2n + 1$:

$\sin (2\,n + 1)\,\xi$

$$= (2\,n + 1) \sin \xi \cdot \sum_{\varrho = 0}^{n} (-1)^{\varrho} \frac{2^{2\varrho}}{2\,\varrho + 1} \binom{n + \varrho}{2\,\varrho} \sin^{2\varrho} \xi$$

und für gerades $m = 2n$:

$$\sin 2n\xi = \cos\xi \cdot \sum_{\varrho=0}^{n-1} (-1)^{\varrho}\, 2^{2\varrho+1} \binom{n+\varrho}{2\varrho+1} \sin^{2\varrho+1}\xi$$

ist, wo $\binom{n+\varrho}{\sigma}$ den σ^{ten} Binomialkoeffizienten von $n + \varrho$ bezeichnet, so erhält man, da die linken Seiten beider Gleichungen für $\xi = \frac{1}{2}\omega_h$ verschwinden, die Seitenlängen aller Arten regelmäßiger Vielecke m^{ter} Ordnung als die positiven Wurzeln der Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} (-1)^{\varrho} \binom{n+\varrho}{2\varrho} \frac{s^{2\varrho}}{2\varrho+1} = 0, \text{ für } m = 2n+1$$

und

$$(2) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} (-1)^{\varrho} \binom{n+\varrho}{2\varrho+1} s^{2\varrho} = 0, \text{ für } m = 2n.$$

Für $m = 5$ z. B. ergibt (1) zur Bestimmung der Seiten der beiden Fünfecke die Gleichung

$$s^4 - 5s^2 + 5 = 0,$$

woraus $s_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $s_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ als Seitenlängen des Fünfecks erster und zweiter Art folgen.

Für $m = 10$ ergibt (2) zur Bestimmung der Seiten der vier Zehnecke die Gleichung

$$s^8 - 8s^6 + 21s^4 - 20s^2 + 5 = 0$$

oder

$$(s^4 - 3s^2 + 1)(s^4 - 5s^2 + 5) = 0.$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt, liefert die Seite des gewöhnlichen Zehnecks und des Sternzehnecks dritter Art:

$$s_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad s_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Der zweite Faktor, welcher gleich Null gesetzt s_2 und s_4 liefert, stimmt überein mit der linken Seite der obenstehenden Gleichung für die Fünfecke. Es sind daher analytisch die

zerfallenden und nicht zerfallenden m-Ecke völlig gleichberechtigt.

Die Erkenntnis, daß die Seitenlängen der regelmäßigen m-Ecke aller Ordnungen durch die positiven Wurzeln derselben algebraischen Gleichung gegeben sind, hat bereits *Joost Bürgi* (1552—1632 oder 1633) besessen: *Kepler* setzt in seinen *Harmonice mundi libri* (Linz 1619; Opera Kepleri, 1864, t. V, p. 104) die Gleichung für das Siebeneck auseinander und beruft sich ausdrücklich auf *Bürgi*. Vgl. *Cantor*, a. a. O., Bd. II, S. 591.

Ersetzt man in den Gleichungen (1) und (2) die Unbekannte s durch $\frac{1}{r}$ und multipliziert mit r^{2n} bzw. r^{2n-2}, so liefern die Wurzeln dieser Gleichungen für r die Radien der den m-Ecken aller Arten mit der Seitenlänge 1 umschriebenen Kreise. Für die Radien der drei Kreise der Figur 11 z. B. erhält man die Gleichung

$$7r^6 - 14r^4 + 7r^2 - 1 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichungen (1) und (2), sowie der aus ihnen für r abgeleiteten sind mit Hilfe von Zirkel und Lineal nur konstruierbar, wenn $m = 2^{\nu} \cdot p$, wo $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ und p eine Primzahl von der Form $2^{2^{\mu}} + 1$ ist, wie *Gauß* auf arithmetischem Wege gezeigt hat. Über die binomische Gleichung $x^n = 1$ und die Kreisteilung vergleiche *Disquisitiones arithmeticae*, sectio VII, Ges. Werke, Bd. 1, S. 412 u. ff.

Als Doppelpunkte eines Vielecks bezeichnet man die Schnittpunkte zweier nicht benachbarten (nicht verlängerten) Seiten und als Diagonalen die Verbindungslinien zweier nicht benachbarten Ecken. *Chr. Wiener* hat in seiner bereits erwähnten Schrift über die Vielecke und Vielflache (S. 4—9) verschiedene Sätze über die Doppelpunkte und die Diagonalen beliebiger Vielecke aufgestellt, vornehmlich gezeigt, daß jedes Vieleck ohne Doppelpunkte von der ersten Art ist. Während die Anzahl der Diagonalen für jedes beliebige m-Eck leicht angebbar, nämlich gleich $\frac{m(m-3)}{2}$ ist, gilt dies für die Anzahl der Doppelpunkte im allgemeinen nicht, sondern nur für die regelmäßigen Vielecke. Sie ist für ein regelmäßiges kontinuierliches m-Eck h^{ter} Arten gleich $m(h-1)$. Diese Doppelpunkte verteilen sich zu je m auf die Peripherien von $h-1$ Kreisen, die mit dem umschriebenen Kreise des m-Ecks kon-

zentrisch sind, und teilen sie ebenfalls in m gleiche Teile (vgl. Fig. 9). Bezeichnet r den Radius des dem m-Eck h^{ter} Art umschriebenen Kreises, so sind — von außen nach innen — die Radien der $h-1$ konzentrischen Kreise gleich

$$r\,\frac{\cos\frac{2R\cdot h}{m}}{\cos\frac{2R\cdot z}{m}}; \quad z = h-1,\ h-2,\ \ldots,\ 2,\ 1.$$

9) *Zu S. 24 und 25.* Eine zahlentheoretische Einkleidung des Beweises dieser *Poinsot*schen Konstruktion gibt *Terquem* in seiner Abhandlung *Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires* (Nouv. Annales de Mathématiques, Paris 1849, t. VIII, p. 68 ff.), in der er sonst nur die Resultate von *Poinsot* und *Cauchy* wiedergibt, ohne Neues hinzuzufügen; eine deutsche Bearbeitung des *Terquem*schen Referates hat dann wieder *J. Dienger* geliefert (Archiv der Mathematik und Physik, 13. Teil, S. 434). — Dem *Poinsot*schen Resultate kann man die folgende Fassung geben: Sämtliche Kanten und Diagonalen (einschl. derer der Seitenflächen) eines Vielflachs mit einer ungeraden Anzahl von Ecken kann man in einem einzigen Zuge durchwandern, so daß man nur einmal über jede Linie geht.

In wievielfach verschiedener Weise sich diese Aufgabe wirklich ausführen läßt, ist eine noch unerledigte Frage. Vgl. hierzu eine Abhandlung von *Reiß* (Annali di matematica, 1871, t. V, p. 63—120), in welcher verwandte Fragen beim Dominospiel behandelt werden.

10) *Zu S. 26.* Auch die Kanten des regelmäßigen Vier-, Zwölf- und Zwanzigflachs lassen sich nicht in einem Zuge und jede nur einmal durchwandern, da von jeder Ecke eine ungerade Anzahl von Kanten — 3 oder 5 — ausgehen. Literatur siehe am Schlusse der Anmerkung 2.

11) *Zu den S. 27 u. 28.* Ist ein geschlossener Faden so gespannt, daß er ein kontinuierliches m-Eck h^{ter} Art bildet, und greift in jedem Eckpunkte eine Einzelkraft $= 1$ an, so findet man durch Zerlegung einer solchen Kraft in zwei Komponenten nach den Seiten des Vielecks für die Spannung des Fadens den Wert $\sec\left[R\left(1-2\frac{h}{m}\right)\right]$. Dieser Wert ist am größten, wenn h seinen kleinsten Wert 1 hat, d. h. für das gewöhnliche m-Eck. —

Die von *Poinsot* in Aussicht gestellte Abhandlung über die Wechselwirkungen zwischen den Punkten eines im Gleichgewichte befindlichen Systems, in welchem die im Text gegebenen Betrachtungen über das Seilvieleck als Beispiel verwendet worden sind, scheint nicht erschienen zu sein; wenigstens ist es mir mit den hier zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht möglich gewesen, eine solche Abhandlung zu ermitteln. In Poinsots *Élémens de statique* findet sich nur der vorstehende Ausdruck für die Spannung in den Seiten eines Vielecks.

12. *Zu S. 31.* Die Mittelpunkte beider Kugeln liegen in dem gemeinsamen Schnittpunkte der in den Mittelpunkten der Seitenflächen errichteten Lote. Denn legt man durch alle Kanten eines regelmäßigen Vielflachs Ebenen, welche die Flächenwinkel halbieren, so entstehen lauter kongruente Pyramiden.

13. *Zu S. 32.* Als Maß eines von zwei größten Kugelkreisen gebildeten Winkels nimmt *Poinsot* hierbei den Flächeninhalt des von diesen Kreisen und dem Äquatorkreise ihrer Schnittpunkte begrenzten Dreiecks. Bezeichnen w_1, w_2, w_3 die Winkel eines sphärischen Dreiecks, so nimmt die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines solchen die Gestalt an

$$w_1 + w_2 + w_3 - 2,$$

wenn die Fläche des Kugeloktanten als Flächeneinheit genommen wird.

Zerlegt man nun ein regelmäßiges sphärisches n-Eck mit den Winkeln α von seinem sphärischen Mittelpunkte aus durch größte Kreise nach seinen Ecken in n kongruente gleichschenklige Dreiecke, und beträgt die Summe der Winkel an der Spitze aller dieser Dreiecke $4\,a'$, so ergibt sich für den Flächeninhalt des n-Ecks, das zur Art a' gehört, der Wert

$$n\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{4\,a'}{n} - 2\right) = n\,\alpha + 4\,a' - 2n.$$

Bedecken nun die F Flächen des Vielflachs die Kugel B-mal, so erhält man die Beziehung

$$F\,(n\,\alpha + 4\,a' - 2\,n) = B \cdot 8. \quad (*$$

Dieser Berechnung eines Flächeninhaltes eines (ebenen oder sphärischen Vielecks liegt, wenn dasselbe ein Sternvieleck ist, eine andere Definition des Inhaltes zugrunde, als sie *Poinsot*

benutzt hat. *Poinsot* geht zwar auf den Flächeninhalt von Sternvielecken nicht besonders ein; aus der Anzahl der Kugelüberdeckungen, die er für die Sterndodekaeder vierter und zweiter Art (vgl. S. 40/41) angibt, kann man aber schließen, daß er bei dem Inhalte eines Sternfünfecks die innere Zelle desselben nur einfach und nicht doppelt in Rechnung bringt. Definiert man, wie bei der Ableitung der obigen Formel stillschweigend geschehen ist, den Flächeninhalt eines regelmäßigen Sternvielecks als Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten des Vielecks sind und deren Spitzen in seinem Mittelpunkte liegen, so werden gewisse Flächenteile (Zellen) des Vielecks zwei- und mehrfach überdeckt, und sind demgemäß zwei- und mehrfach in Rechnung zu bringen; die Zahl der Überdeckungen einer Zelle bezeichnet man als ihren Koeffizienten. So sind z. B. bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Sternelfecks 4. Art (vgl. Fig. 11) die viereckigen Spitzen $a_3\, a_4\, e_3, \ldots$ einfach, die Vierecke $a_2\, a_3\, g_2, \ldots$ zweifach, die Dreiecke $a_1\, a_2\, b_1, \ldots$ dreifach und der innere Kern, das gewöhnliche Elfeck $a_1\, b_2\, c_1 \ldots l_1$ vierfach zu nehmen. Diese Zellen besitzen also die Koeffizienten 1, 2, 3, 4.

Diese Art, den Flächeninhalt eines beliebigen Sternvielecks zu berechnen, ist nur eine Spezialisierung der allgemeinen Definition des Flächeninhaltes eines beliebig begrenzten Vielecks, wie sie jetzt üblich und wissenschaftlich allein berechtigt ist. Diese allgemeine Definition ist zuerst von *A. L. F. Meister* in seiner bereits genannten Abhandlung gegeben, die aber leider in jeder Beziehung ohne Einfluß auf die Wissenschaft geblieben war, und dann von *Möbius* wieder aufgestellt und zur Geltung gebracht. Aber auch die Formel von *Gauß* für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines beliebig gestalteten ebenen Vielecks durch die Koordinaten seiner Eckpunkte enthält implizite die obige Definition. Weiteres über den Flächeninhalt ebener Polygone siehe *Günther*, a. a. O. S. 70—74 und *Brückner*, a. a. O. S. 6—8. 13—16. —

In dieser unrichtigen Auffassung des Flächeninhaltes eines Sternvielecks liegt es begründet, daß *Poinsot* die Formel (*) nur für den Fall seiner beiden ersten neuen Vielflache aufstellen konnte, für welche die Seitenflächen gewöhnliche regelmäßige Vielecke sind. Für beide ist $a = 1$ und B mit *Poinsots* A (vgl. auch S. 91/92) identisch. Für seine Sterndodekaeder vierter und zweiter Art konnte er offenbar, weil er infolge seiner oben erwähnten falschen Definition die Zahl der

Kugelüberdeckungen zu 4 und 2 statt zu 7 und 3 angab, keine entsprechende Relation finden. Für diese beiden Körper ist $a' = 2$ und $B = 7$, bzw. $= 3$. Deshalb ist auch *Poinsots* Bezeichnung dieser Körper als Sterndodekaeder vierter und zweiter Art unrichtig; sie sind vielmehr als Sterndodekaeder siebenter und dritter Art zu bezeichnen.

Da *Wiener* sich der richtigen Definition des Flächeninhaltes eines Vielecks bedient, so ist es ihm möglich, die allgemeine Formel (*) abzuleiten (a. a. O. S. 28—30).

Die Bezeichnung in den Formeln ist gegen das Original verändert, um den *Euler*schen Satz in der in Deutschland gebräuchlichen Form $E + F = K + 2$ erscheinen zu lassen. *Poinsot* benutzt die Anfangsbuchstaben der entsprechenden französischen Worte, also S (sommet), F (face), A (arête), E und e (espèce) statt der im Texte gebrauchten E, F, K, A, a.

14) *Zu den S. 37, 59 u. 79.* Die Abbildungen aller Vielflache sind in schiefer Parallelprojektion gezeichnet, bei den Sternvielflachen aber nur die sichtbaren Kanten angegeben. Die Größenverhältnisse sind so gewählt, daß die Ecken der sämtlichen Vielflache erster Art, denen nach dem *Bertrand*schen Verfahren die Vielflache höherer Art eingeschrieben sind, auf derselben Kugel vom Radius r liegen. Für die Sternvielflache sind die umhüllenden Vielflache das Ikosaeder $a_1 \ldots a_{12}$ und das Dodekaeder $b_1 \ldots b_{20}$, deren Kantenlängen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sich leicht aus dem beliebig angenommenen Kugelradius r konstruieren lassen.*) Als Kern dieser Sternvielflache (nach *Cauchy*) treten dann natürlich Ikosaeder $c_1 \ldots c_{12}$, $f_1 \ldots f_{12}$, bzw. Dodekaeder $d_1 \ldots d_{20}$, $e_1 \ldots e_{20}$ von verschiedenen Kantenlängen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, bzw. $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ auf. Die Sternvielflache besitzen dieselben Symmetrieachsen und -ebenen, wie das Ikosaeder und Dodekaeder.

Die Figuren 15 und 43 zeigen das Entstehen des Ikosaeders der siebenten Art nach *Poinsot-Bertrand*. Es ist in das umhüllende Ikosaeder a nur die eine Seitenfläche $a_1\, a_8\, a_{11}$ des neuen Ikosaeders mit den Durchdringungslinien aller seiner übrigen Seitenflächen eingezeichnet; die schraffierten Flächenteile von $a_1\, a_8\, a_{11}$ sind am geschlossenen Körper (Fig. 16 u. Taf. I) von außen sichtbar. Die dreißig Kanten

*) Es ist $\mathfrak{a} = r\sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$,

$\mathfrak{b} = \frac{r}{3}\sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1)$.

dieses Sternkörpers schneiden sich in den zwanzig Punkten $d_1, \ldots, d_{20}$, welche die Ecken eines Dodekaeders bilden. Die Lage der Punkte d auf einer Kante des Sternkörpers und damit die Länge der Kante $\mathfrak{d}$ lassen sich leicht konstruieren, wenn man beachtet, daß je fünf in einer Ebene gelegene Kanten des Sternkörpers ein Sternfünfeck bilden, dessen Ecken in den Eckpunkten eines gewöhnlichen Fünfecks mit der Seite $\mathfrak{a}$ liegen, und dessen Doppelpunkte die Ecken des Dodekaeders sind, z. B. $a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ mit den Doppelpunkten d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 (Fig. 16).

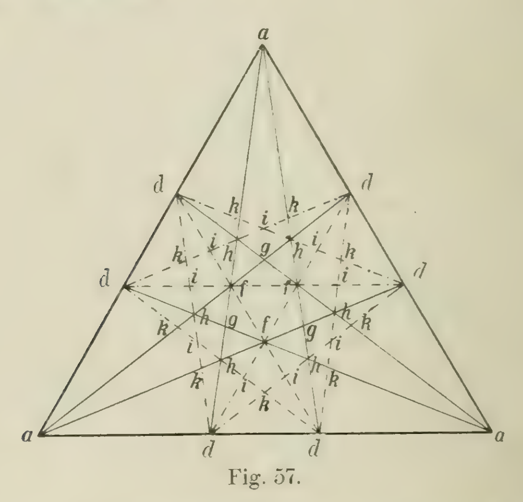


Fig. 57.

In Fig. 57 ist eine in die Zeichenebene umgelegte Seitenfläche des Ikosaeders siebenter Art in ihrer wahren Gestalt dargestellt; die Punkte d sind die Dodekaederecken. Zugleich erkennt man, daß die Seitenfläche des Ikosaeders, das den Kern des betrachteten Sternkörpers bildet, durch das innerste Dreieck $f\,f\,f$ der Figur ($f_3\; f_4\; f_{12}$ in Fig. 15, 43) gegeben wird.

Als Doppelpunkte eines Vielflachs bezeichnet man die Punkte, die Schnittpunkte von drei oder mehr (nicht verlängerten) Seitenflächen, aber nicht Eckpunkte desselben sind, und als Flächendoppelkanten die Geraden, die Schnittlinie von zwei oder mehr nicht verlängerten) Seitenflächen, aber nicht Kanten sind. Demnach sind alle Punkte d, f, g, h, i,

k Doppelpunkte und alle Verbindungslinien der Punkte a mit den gegenüberliegenden Punkten d und der letzteren untereinander Flächendoppelkanten des Ikosaeders siebenter Art. Die folgende Tafel gibt die Gesamtzahl σ dieser Punkte auf dem Sternvielflach (jeden einfach gezählt) und die Anzahl τ der sich in jedem schneidenden Ebenen:

	σ	τ		σ	τ
d	20	6	h	30	4
f	12	5	i	60	3
g	20	3	k	60	3

Flächendoppelgerade ad gibt es 60 und dd 90; 30 der letzteren sind die Verlängerungen der Kanten ff des Kern-Ikosaeders.

Von diesen Doppelpunkten und Flächendoppelgeraden sind am Modell des Ikosaeders siebenter Art sichtbar nur die 20 Punkte d und die 60 Punkte k (in Fig. 16 die sämtlichen Punkte ohne Bezeichnung) und die 20 Doppelkanten ak und die 60 Doppelkanten dk soweit, als sie die in Fig. 15 schraffierten Flächenteile begrenzen.

Betreffs der übrigen Doppelelemente (Eckendoppelkanten und Doppelebenen) eines Vielflachs, ihrer Untergruppen, der Multiplizität der einzelnen Elemente, sowie des Nachweises, daß auch in bezug auf die Doppelelemente die vier Sternvielecke paarweise polar-reziprok, wie es die *Cayley*sche Tafel auf S. 92 zeigt, zugeordnet sind, muß auf *E. Heß* (Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Kassel, 1876) und *Brückner* a. a. O., S. 172—176) verwiesen werden. —

Die Figur 34, die im Interesse der deutlichen Sichtbarkeit des Kern-Ikosaeders $f_1 \dots f_{12}$ im Verhältnis zu den übrigen Figuren im Maßstabe 3 : 2 gezeichnet ist, zeigt das Entstehen einer Seitenfläche des Ikosaeders siebenter Art nach *Cauchy*; die Kanten von $a_1\ a_8\ a_{11}$ sind die Schnittgeraden der Seitenflächen $f_2\ f_6\ f_{10}$, $f_5\ f_6\ f_9$, $f_7\ f_9\ f_{10}$ mit $f_3\ f_4\ f_{12}$.

Für das Verhältnis der Kantenlängen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ findet man leicht

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{d} : \mathfrak{f} = 1 : 4\ \sin^2 \frac{\pi}{10} : \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}.$$

15) *Zu den S. 39, 58 und 79.* Die Figuren 17 und 45 zeigen das Entstehen einer Seitenfläche des Dodekaeders dritter

Art (Fig. 18 u. Taf. I) aus dem Ikosaeder *a* nach *Poinsot-Bertrand*, deren sichtbare Flächenstücke ebenfalls schraffiert sind. Das Dodekaeder mit der Kantenlänge $\mathfrak{b}$ ist der Kern dieses Sternvielflaches, dessen Entstehen nach *Cauchy* aus dem gewöhnlichen Dodekaeder die Fig. 29 veranschaulicht.

Die Ecken *d* dieses dodekaedrischen Kernes sind die 20 Doppelpunkte und ihre 30 Verbindungslinien mit den entsprechenden Ecken des Ikosaeders *a* die Flächendoppelkanten des Dodekaeders dritter Art: z. B. $a_4\ d_7\ d_{19}\ a_{11}$. In jedem Doppelpunkte schneiden sich drei Ebenen. Alle Doppelelemente dieses Körpers sind sichtbar.

16) *Zu den S. 40, 58 und 78.* In der Figur 19 sind von dem Dodekaeder dritter Art, aus dem *Poinsot* seinen dritten Sternkörper (Fig. 20 u. Taf. II) ableitet, der besseren Übersichtlichkeit wegen nur die Kanten, d. h. ein gewöhnliches Ikosaeder, gezeichnet und alle Doppelkanten fortgelassen. Damit aber die Ecken des Sternkörpers mit denen des Dodekaeders *b* zusammenfallen, aus welchem ihn *Bertrand* ableitet (Fig. 41), ist die Kante des Ikosaeders *c* entsprechend kleiner gewählt. Die Fig. 30, welche das Entstehen desselben Sternkörpers aus seinem dodekaedrischen Kern zeigt, ist wieder in 1 1/2 Vergrößerung gezeichnet. Die Kantenlängen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$ der beiden Dodekaeder und $\mathfrak{c}$ des Ikosaeders stehen zueinander im Verhältnisse

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{c} : \mathfrak{e} = 1 : 2 \sin\frac{\pi}{10} : 8 \sin^3\frac{\pi}{10}.$$

Die Ecken des Ikosaeders *c* sind die 12 sichtbaren Doppelpunkte: durch jeden gehen fünf Seitenflächen des Körpers. Die Ecken des Dodekaeders *e* ergeben weitere 20 Doppelpunkte des Sternkörpers, welche aber, ebenso wie seine 30 Flächendoppelkanten nicht sichtbar sind. Die Flächendoppelkanten fallen in die Verlängerungen der Kanten des Dodekaeders *e* oder, was dasselbe ist, in die Diagonalen der auf dem Ikosaeder *c* liegenden Fünfecke erster Art (Fig. 30).

17) *Zu den S. 40, 55 und 82.* Die Fig. 21, welche das Entstehen des vierten Sternkörpers (Fig. 22 u. Taf. II) nach *Poinsot* zeigt, dient auch zur Veranschaulichung seiner Erzeugung nach *Cauchy*; man kann sich noch die Fig. 27 in der Weise, wie es in Fig. 29 geschehen ist, vervollständigt denken. Die Ecken dieses Sternkörpers bilden nach *Bertrand* ein Ikosaeder, welches ihm umgeschrieben ist (Fig. 47).

Dieses Sternvielflach besitzt nur die sichtbaren 20 Eckpunkte seines dodekaedrischen Kernes als Doppelpunkte. Flächendoppelkanten sind nicht vorhanden.

Wegen der Anzahl der Kugelüberdeckungen für den dritten und vierten *Poinsot*schen Sternkörper s. Anmerk. 13.

18) *Zu S. 42.* Diese Zahl ist gleich $\frac{A}{F}$ und bestimmt sich unmittelbar aus den Gleichungen

$$F = p \cdot 28, \quad A = p \cdot 5$$

auf S. 37.

19) *Zu S. 44 (Anmerkung).* *Nicolas Joseph Lidonne* (1757—1830) war vor der Revolution Professor der Mathematik, während derselben Rat im Justizministerium und nachher am Athénée des Arts in Paris angestellt. Sein von *Poinsot* zitiertes Werk trägt den Titel: *Table de tous les diviseurs des nombres calculés depuis un jusqu'à cent deux mille, suivies d'une dissertation sur une question de stéréométrie, extraite de quelques auteurs du siècle dernier*, Paris 1808.

20) *Zu S. 46.* *Poinsot* hat, soviel mir bekannt ist, keine Abhandlung weiter über die hier angedeuteten Fragen veröffentlicht. Seine einzige weitere Arbeit stereometrischen Inhaltes, *Note sur la théorie des polyèdres* (Comptes rendus, Paris 1858, t. XLVI, p. 65—78) berührt jene Fragen nicht, sondern behandelt die Trigonalpolyeder, das sind Vielflache, deren sämtliche Begrenzungsflächen Dreiecke sind.

21) *Zu S. 46.* *Euler* hat den Satz über die Vielflache

$$E + F = K + 2$$

zuerst in der Abhandlung *Elementa doctrinae solidorum* (Novi Commentarii Acad. scient. Petropolitanae 1758, t. IV, p. 109—140) ohne Beweis mitgeteilt und ausdrücklich erklärt, daß er einen Beweis für diesen Satz noch nicht besitze. Erst in einer zweiten Abhandlung *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita* (a. a. O., p. 140—160) holt *Euler* den Beweis für seinen empirisch gefundenen Satz nach. Durch Hilfsebenen trennt *Euler* eine Ecke des ursprünglichen Vielflachs ab und weist dann nach, daß für das übrigbleibende Vielflach die Summe der Ecken und Flächen vermindert um die Kanten noch denselben Wert hat, wie für das ursprüngliche Vielflach. Setzt

man dieses Abtrennen von Ecken in gleicher Weise fort, so bleibt schließlich ein Vierflach übrig, für welches $E + F - K$ denselben Wert besitzt, wie für das ursprüngliche Vielflach; für das Vierflach aber ist dieser Wert 2.

Der Satz ist, ohne daß *Euler* davon irgendwelche Kenntnis hatte, bereits *Descartes* bekannt gewesen, wie man aus einer *Leibniz*schen Abschrift einer Notiz von *Descartes* weiß. (*Oeuvres inédites* de *Descartes*, Paris 1860, t. II, p. 214.)

Legendre (Élémens de géométrie, 8 ed., Paris 1809, p. 228) projiziert aus einem Punkte im Innern des Vielflachs seine Begrenzung auf eine dasselbe ganz einschließende Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Projektionszentrum zusammenfällt, und wendet dann zum Beweise des *Euler*schen Satzes die Formel für den Flächeninhalt sphärischer Vielecke an. Der Beweis läßt sich nicht für mehrfach zusammenhängende Oberflächen erweitern.

Die sämtlichen Beweise des *Euler*schen Satzes sind von *Brückner* (a. a. O. S. 58—67) angeführt und nach den angewandten Methoden in vier Gruppen geordnet:

1. Methode der Körperzerlegung (*Euler*), 2. Methode des Inhalts der sphärischen Vielecke (*Legendre*), 3. Methode der Winkelsumme der durch Projektion aus dem Vielflach erhaltenen Vielecke (*Lhuilier* 1812 und *Steiner* 1826), 4. Methode der Oberflächenzerlegung (*Cauchy*, S. 63 u. ff. dieses Bändchens).

Ebenda findet man auch die Verallgemeinerungen des *Euler*schen Satzes besprochen. Die weiteste Verallgemeinerung ist von *Listing* in seinem C e n s u s r ä u m l i c h e r C o m p l e x e (Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1862, Bd. 10) gegeben, in dem man es nicht nur mit geschlossenen Vielflachen, sondern mit beliebigen Komplexen räumlicher Gebilde (Punkte, Linien, Flächen, Raumzellen) zu tun hat.

22) *Zu S. 48.* Die von *Poinsot* gegebene Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes gilt nicht für alle vier Sternvielflache, wie es nach *Poinsot*s Mitteilung scheinen könnte, sondern nur für sein neues Ikosaeder siebenter Art und sein neues Dodekaeder dritter Art, für welche $a' = 1$, $A = B$ (siehe Anmerkung 17) ist; *Poinsot*s Formel stimmt in diesen Fällen mit der *Cayley*schen (S. 93) überein. Es ist befremdlich, daß *Poinsot* nicht für alle vier Sternvielflache seine Formel geprüft und seinen Irrtum erkannt, bzw. den Geltungsbereich der Formel angegeben hat.

23) *Zu S. 49.* Der zweite Teil von *Cauchys* Abhandlung*) ist in das vorliegende Bändchen nicht aufgenommen, da er in keiner Beziehung zu den Sternvielflachen steht. *Cauchy* beweist darin den in der neunten Definition des elften Buches von *Euklids* Elementen enthaltenen Satz, daß ein konvexes Vielflach, für welches der *Euler*sche Satz $E + F = K + 2$ gilt, durch seine Oberfläche, also durch sein Netz völlig bestimmt ist.

24) *Zu den S. 54 und 76.* Gleichwie man zwei konzentrische und gekreuzt liegende kongruente gleichseitige Dreiecke als diskontinuierliches Sechseck zweiter Art auffassen kann, läßt sich auch der durch Fig. 26 veranschaulichte Tetraederzwilling als diskontinuierliches Vielflach zweiter Art — für $E = 8$, $F = 8$, $K = 12$ folgt $B = 2$ aus der *Cayley*schen Formel — betrachten, und zwar je nach seiner Erzeugungsweise als Oktaeder zweiter Art (*Cauchy*, Fig. 26) oder Hexaeder zweiter Art (*Bertrand*, Fig. 38). Diese beiden Erzeugungsweisen entsprechen der Erzeugung eines Sechsecks zweiter Art entweder durch Verlängern der Seiten oder durch Verbinden jeder Ecke mit der zweitfolgenden in einem gewöhnlichen Sechsecke. In Fig. 26 bezeichnen o die Oktaederecken, p und q die Ecken der beiden Tetraeder. Der besseren Übersichtlichkeit wegen ist in Fig. 38 nur ein Tetraeder gezeichnet. *Kepler* nennt diesen Körper *stella octangula.*

25) *Zu S. 58.* Die Fig. 33, welche die *Cauchy*sche Zoneneinteilung der Flächen eines Ikosaeders veranschaulicht, zeigt das Ikosaeder in Zentralprojektion. Als Projektionszentrum dient ein Punkt (außerhalb des Ikosaeders) senkrecht über dem Mittelpunkte einer Seitenfläche, z. B. $a_7\, a_8\, a_9$ (vgl. Fig. 15), dessen senkrechter Abstand von ihr kleiner ist, als die Höhe der durch Verlängerung der angrenzenden Seitenflächen (*II*) entstehenden Pyramide; als Projektionsebene dient die erwähnte Seitenfläche selbst. Dann projiziert sich das ganze Ikosaeder in das Innere dieser Seitenfläche $a_7\, a_8\, a_9$ und die ihr parallele Fläche in das mittlere Dreieck $a_1\, a_2\, a_3$. (Die Projektionen der Ecken sind mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die Ecken des Ikosaeders in Fig. 15.)

26) *Zu S. 61.* Das in der Fig. 36 gezeichnete Oktaeder erhält man, indem man von den durch ihre Eckenindizes bezeichneten Flächen des Ikosaeders c:

---

*) In der ersten Klasse des Institutes am 20. Jan. 1812 gelesen (Journ. de l'Éc. polyt. 16. cahier [T. IX], p. 87).

1	2	3	7	8	9
1	5	6	7	11	12
4	5	8	10	11	2
4	3	12	10	6	9

je zwei, die eine Ecke gemeinsam haben, miteinander zum Schnitte bringt. Die auf derselben Zeile stehenden Flächen sind einander parallel. Jede Oktaederkante geht durch eine Ecke des Dodekaeders b, z. B. die Schnittlinie 1 2 3 und 1 5 6 durch b_{10}, da sie durch den Schnittpunkt von 2 3 und 5 6 gehen muß. (Vgl. Fig. 19.)

Wendet man die *Cauchy*sche zweite und dritte Konstruktion auf alle Flächen des Ikosaeders an, so erhält man im ganzen fünf verschiedene Oktaeder; daher gehen durch jeden Eckpunkt des Dodekaeders b drei zu verschiedenen Oktaedern gehörende Kanten. Um für die übrigen Oktaeder die mit ihren Flächen zusammenfallenden Ikosaederflächen zu erhalten, braucht man nur in der vorstehenden Tafel die Indizes 1 und 7 ungeändert zu lassen, die Indizes 2, 3, 4, 5, 6 aber unter sich zyklisch zu vertauschen und gleichzeitig ebenso die Indizes 8, 9, 10, 11, 12.

Das von diesen fünf Oktaedern gebildete diskontinuierliche Vielflach besitzt zwar das Ikosaeder als Kern, ist aber trotzdem kein regelmäßiges Vielflach höherer Art, da seine 30 vierkantigen Ecken nicht die Ecken eines regelmäßigen Vielflachs erster Art bilden können, sondern die Ecken des gleicheckigen Archimedischen Körpers, welcher in Fig. 23 abgebildet ist und als T r i a k o n t a g o n bezeichnet wird. Eine Abbildung des diskontinuierlichen Vielflachs der fünf Oktaeder findet sich bei *Brückner* (a. a. O., Taf. IX, Fig. 6). Es ist polar-reziprok zu dem aus fünf konzentrischen Würfeln gebildeten diskontinuierlichen Vielflache, welches zwar einem regelmäßigen Dodekaeder eingeschrieben ist, aber kein regelmäßiges Vielflach, sondern das zu dem Triakontagon polar-reziproke Triakontaeder als Kern besitzt.

27) *Zu den S. 62 und 77.* Bringt man die vier Ikosaederflächen

1 2 3, 4 5 8, 6 9 10, 7 11 12,

miteinander zum Schnitte, so erhält man das in der Fig. 37 gezeichnete Tetraeder, dessen Ecken in vier Ecken des Dodekaeders b liegen müssen (b_4, b_7, b_{11}, b_{18}); denn die Schnittlinie von 1 2 3 und 7 11 12 z. B. muß durch den Schnittpunkt b_7

von 2 3 und 7 12 und den Schnittpunkt b_{18} von 1 2 und 7 11 gehen (vgl. Fig. 19).

Vertauscht man die obigen Indizes in der in der vorigen Anmerkung angegebenen Weise zyklisch, so berührt man allmählich alle Ikosaederflächen und erhält weitere vier Tetraeder, deren Ecken sich aus denen des ersten $b_4\ b_7\ b_{11}\ b_{18}$ durch zyklische Vertauschung der Indizes innerhalb der vier Gruppen

$$1\ldots 5,\quad 6\ldots 10,\quad 11\ldots 15,\quad 16\ldots 20$$

ergeben. In der Fig. 40 ist zur Veranschaulichung von *Bertrands* Verfahren das Tetraeder $b_1\ b_9\ b_{13}\ b_{20}$ gezeichnet.

Der von diesen fünf Tetraedern gebildete Körper ist als diskontinuierliches regelmäßiges Vielflach fünfter Art aufzufassen, denn mit Hilfe der *Cayley*schen Formel (S. 93), in der $E = 20$, $F = 5 \cdot 4 = 20$, $K = 5 \cdot 6 = 30$, $a = 1$, $a' = 1$ zu setzen ist, findet man $B = 5$. *Brückner* hat eine Abbildung dieses Körpers (a. a. O., Taf. IX, Fig. 11) gegeben.

Geht man von den vier Ikosaederflächen

$$1\ 2\ 3,\quad 4\ 8\ 12,\quad 5\ 6\ 9,\quad 7\ 10\ 11$$

aus, so erhält man das Tetraeder $b_3\ b_{10}\ b_{11}\ b_{19}$ und durch zyklische Vertauschung in der obigen Weise vier weitere. Diese fünf Tetraeder bilden ebenfalls ein dem Dodekaeder b eingeschriebenes diskontinuierliches regelmäßiges Vielflach fünfter Art, welches das Spiegelbild des vorigen ist.

Alle zehn Tetraeder zusammen bilden aber ebenfalls ein diskontinuierliches regelmäßiges Vielflach zehnter Art. Siehe Abbildung desselben bei *Brückner* a. a. O., Taf. IX, S. 3).

28) *Zu S. 64.* Als Verallgemeinerungen dieses *Cauchy*schen Satzes können die Untersuchungen von *Camille Jordan* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1866, Bd. LXVI, S. 86) und besonders von *J. K. Becker* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1869, Bd. XIV, S. 65 u. 337; 1873, Bd. XVIII, S. 328; 1874, Bd. XIX, S. 459) angesehen werden. In der letzten Abhandlung dehnt *Becker* seinen Satz über die Zerlegung der Oberfläche eines kontinuierlichen Vielflachs in Dreiecke auf die Sternvielflache aus. Auch die eigenartigen Untersuchungen von *Möbius* seien hier angeführt (Ges. Werke, Bd. II, S. 433—471 u. S. 515—559). Im übrigen siehe Anmerkung 21.

29) *Zu S. 73.* Dieser Hinweis bezieht sich auf die in der Anmerkung Nr. 20 genannte Abhandlung von *Poinsot.*

30) *Zu S. 74.* Man verbinde alle gegebenen Punkte untereinander. Jeder dieser Punkte, durch den sich eine Ebene so legen läßt, daß alle von ihm ausgehenden Verbindungslinien auf derselben Seite dieser Ebene liegen, ist ein Eckpunkt des gesuchten Vielflachs. Durch die Schnittpunkte der von einem Eckpunkte ausgehenden Geraden mit einer zu der erwähnten parallelen Ebene lege man ein konvexes Vieleck erster Art so, daß seine Eckpunkte sich unter den Schnittpunkten befinden, und es alle übrigen Schnittpunkte in seinem Innern oder auf seiner Begrenzung enthält. Zu diesem Zwecke verbinde man jeden Schnittpunkt mit allen übrigen und nehme als Ecken des Vielecks alle die, in denen die äußersten Verbindungslinien einen Winkel kleiner als $2R$ einschließen. Die Ebenen durch die Seiten dieses Vielecks und den betrachteten Eckpunkt des gesuchten Vielflachs sind dann Seitenflächen des letzteren. — Der hier angedeutete Beweis findet sich näher ausgeführt bei *Wiener* (a. a. O., S. 20).

Wiener hat den *Bertrand*schen ersten Hilfssatz insofern auch genauer formuliert, als er berücksichtigt, daß diejenigen gegebenen Punkte, in welche nicht Ecken des konvexen Vielflachs fallen, nicht nur im Innern, sondern auch in den Seitenflächen desselben liegen können.

Zum Beweise des zweiten Hilfssatzes nehme man an, daß von jeder Ecke des Vielflaches m Kanten ausgehen, und daß seine Oberfläche von f_3 Dreiecken, f_4 Vierecken, . . ., f_n n-Ecken gebildet wird. Dann bestehen, wenn E, F, K die frühere Bedeutung haben, die Gleichungen

$$mE = 2K$$

$$f_3 + f_4 + \dots + f_n = F$$

$$3f_3 + 4f_4 + \dots + nf_n = 2K.$$

Aus der ersten Gleichung folgt mit Benutzung des *Euler*schen Satzes und der beiden letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} m = \frac{2K}{E} &= \frac{2K}{K - F + 2} \\ &= 2 \cdot \frac{3f_3 + 4f_4 + \dots + nf_n}{f_3 + 2f_4 + \dots + (n-2)f_n + 4} \\ &= 6 - 4\,\frac{f_4 + 2f_5 + \dots + (n-3)f_n + 6}{f_3 + 2f_4 + \dots + (n-2)f_n + 4}. \end{aligned}$$

Der rechtsstehende Bruch kann nie Null oder negativ werden. Da nun m seiner Bedeutung nach eine ganze Zahl > 2 sein muß, so folgt, daß sein größtmöglicher Wert 5 ist, w. z. b. w.

Bertrand bezeichnet das konvexe Vielflach erster Art im Gegensatze zu dem höherer Art stets schlechthin als konvexes Vielflach. Da der hierdurch entstehende Widerspruch gegen die *Poinsot*sche Definition eines konvexen Vielflachs als eines solchen, dessen sämtliche Flächenwinkel $< 2R$ sind, leicht zu Irrtümern zu führen geeignet ist, so habe ich »konvexes Vielflach« durch »(konvexes) Vielflach erster Art« ersetzt.

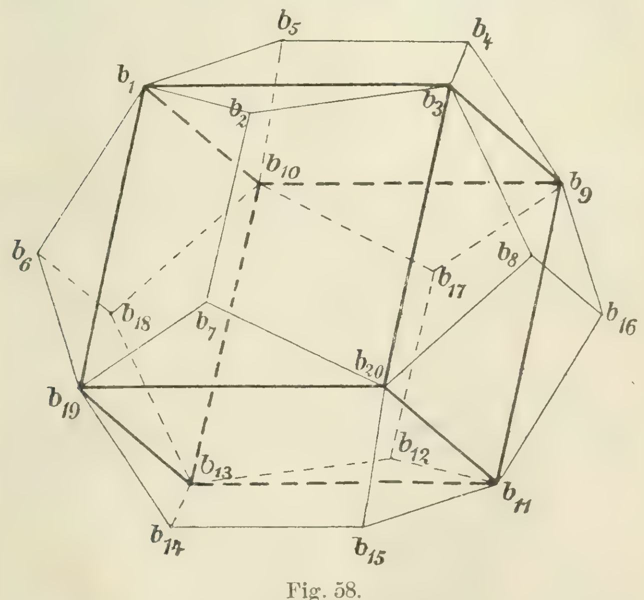


Fig. 58.

31) *Zu S. 77.* *Bertrand* läßt hier noch eine Möglichkeit unerwähnt. Zwei nicht benachbarte Diagonalen zweier benachbarten Seitenflächen des Dodekaeders bestimmen ein Quadrat, z. B. b_8 b_4 (Fig. 39) mit b_8 b_7, ebenso b_8 b_4 mit b_8 b_{11} und b_8 b_7 mit b_8 b_{11}. Setzt man diese Konstruktion fort, so berührt man nicht alle Ecken des Dodekaeders, sondern nur b_8 b_4 b_1 b_7 b_{18} b_{17} b_{11} b_{14}; welche einen Würfel bestimmen. Solcher

Würfel stoßen in jeder Dodekaederecke zwei zusammen, z. B. in der Ecke b_1 der eben genannte Würfel und b_1 b_3 b_9 b_{10} b_{19} b_{20} b_{11} b_{13}.

In Fig. 58 ist der Übersichtlichkeit wegen nur der günstiger gelegene zweite Würfel gezeichnet.

Im ganzen Dodekaeder stehen also fünf Würfel; eine Abbildung des von ihnen gebildeten diskontinuierlichen Vielflachs gibt *Brückner* (a. a. O., Taf. XII, Fig. 24).

Dieses diskontinuierliche Vielflach ist aber nicht zu den regelmäßigen Vielflachen höherer Art zu zählen, da es als Kern nicht ein regelmäßiges Vielflach erster Art besitzt, sondern ein Rhombentriakontaeder. Dieses gehört zu den gleichflächigen Vielflachen und entsteht aus einem Dodekaeder durch Aufsetzen solcher geraden Pyramiden auf die Seitenflächen, daß benachbarte Flächen zweier benachbarten Pyramiden in einer Ebene liegen. (Weiteres und Abbildung siehe *Brückner*, a. a. O., S. 149, Nr. 118, [21′] und S. 209, Nr. 156.) Vgl. Anmerkung 26.

32) *Zu S. 85.* *Cayley* bedient sich der *Poinsot*schen Bezeichnungen und führt nur die Buchstaben D und e' neu ein. Es sind hier die *Cayley*schen Bezeichnungen in gleicher Weise geändert, wie früher die *Poinsotschen* (vgl. Schluß der Anmerkung 13) und statt der *Cayley*schen D, e' sind B, a' gesetzt.

33) *Zu S. 86.* In der Fig. 50 bezeichnen die Punkte a_1, a_3, a_4, a_8, a_{11}, a_{12} die Projektionen der gleichnamigen Ecken des Ikosaeders in Fig. 15 auf eine mit ihm konzentrische Kugel. Die punktierten Kreisbogen sind die Projektionen der Ikosaederkanten, die ausgezogenen Bogen die der Kanten des abgeleiteten Ikosaeders der 7. Art Fig. 49). In ähnlicher Weise sind die Figg. 52 und 54 zu verstehen; in den beiden letzteren sind die mit b_ν bezeichneten Punkte die Projektionen der Ecken des Sterndodekaeders der siebenten Art (Fig. 53) und mithin zugleich die der Ecken des ihm umschriebenen Dodekaeders. In Fig. 56 bezeichnen die b_ν die Ecken des Dodekaeders, das den Kern des kleinen Sterndodekaeders (Sterndodekaeder der dritten Art) (Fig. 55) bildet, und die a_ν die Projektionen der Ecken des letzteren selbst und also auch die der Ecken des ihm umschriebenen Ikosaeders. (Siehe auch die Anmerkungen 14—17.)

34) *Zu S. 89.* Vgl. Anmerkung 13.

35) *Zu S. 92 und 93.* Die Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes auf konvexe oder nichtkonvexe Vielflache mit

Flächen und Ecken beliebiger Art hat *E. Heß* gegeben (*Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder.* Kassel 1876.) Bei dieser Gelegenheit sei noch auf die verschiedenen, für die Theorie der Vielflache äußerst wichtigen Arbeiten von *Heß* hingewiesen, die in den Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der ges. Naturwissenschaften zu Marburg veröffentlicht sind, und auf seine *Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung*, Leipzig 1883.

Die von *Cayley* eingeführte Zahl B steht im engen Zusammenhange zu der Zahl δ der von den Kanten einer Seitenfläche gebildeten Doppelpunkte (Doppelpunkte erster Klasse) und der Anzahl ϑ der von einer Ecke ausgehenden Doppelkanten. Für ein regelmäßiges n-Eck a^{ter} Art ist (nach Anmerkung 8) $\delta = n(a' - 1)$, also

$$a' = \frac{\delta}{n} + 1.$$

Um die Zahl ϑ zu finden, hat man nur zu beachten, daß sie gleich der Anzahl der Doppelpunkte des sphärischen Vielecks ist, in das sich die körperliche Ecke auf die Kugel projiziert. Wird eine regelmäßige Ecke a^{ter} Art gebildet von n' Seitenflächen, so ist also $\vartheta = n'(a - 1)$ und folglich

$$a = \frac{\vartheta}{n'} + 1.$$

Setzt man diese Werte in die *Cayley*sche Verallgemeinerung des *Euler*schen Satzes ein, so erhält man

$$E \cdot \frac{\vartheta}{n'} + F \cdot \frac{\delta}{n} = 2B - (E + F - K);$$

Diese Formel gilt nicht nur für alle regelmäßigen Vielflache, sondern auch für alle Vielflache mit gleichen Ecken und gleichen Flächen, für die ϑ und δ die oben angegebenen Werte besitzen.

Für die vier regelmäßigen Sternkörper haben δ und ϑ die Werte

	δ	ϑ
Sterndodekaeder 7. Art (Großes Sterndodek.)	5	0
Ikosaeder 7. Art (Großes Ikosaeder	0	5
Sterndodekaeder 3. Art (Kleines Sterndodek.)	5	0
Dodekaeder 3. Art (Großes Dodekaeder	0	5

Auch diese Tafel zeigt die gleiche polar-reziproke Paarung der Körper, wie die *Cayley*sche Tafel auf S. 92.

36) *Zu S. 94.* Wieder abgedruckt in *Cayleys collected mathematical Papers*, vol. IV, pp. 182—185 unter dem Titel: *The problem of polyhedra.*

Jena, 31. Juli 1906.

Robert Haussner.

Inhalt.

Seite

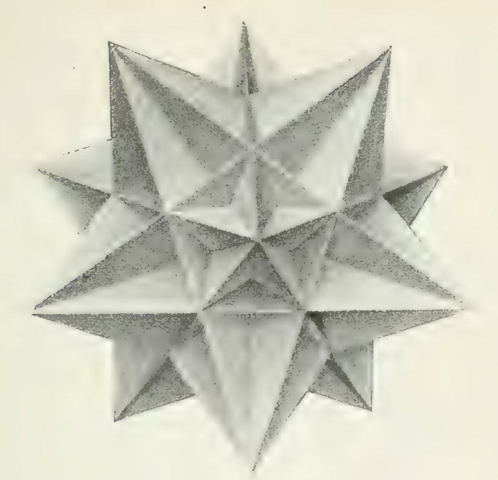
Anmerkungen.

Berichtigungen.

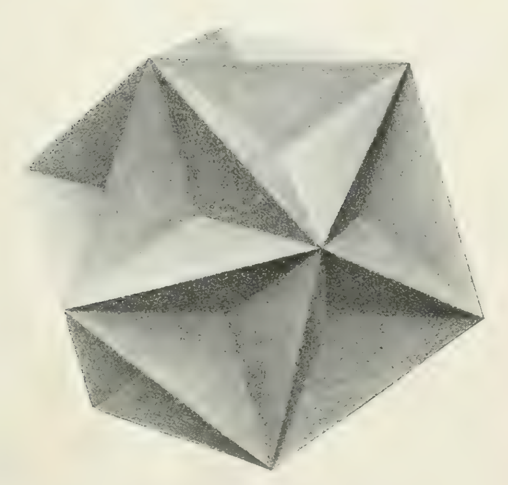
		Statt	*M. Poinsot*	lies	*L. Poinsot*.
S. 21,	Z. 15 v. u.	»	die	»	diese letzteren.
	Z. 7 v. u.	»	$h^{(-)} = h$	»	$h'^{(-)} = h$.
S. 49,	Z. 13 v. o.	»	allgemeinen	»	allgemeinen[23].
S. 58,	Z. 8 v. o.	»	be	»	bestimmte.



Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



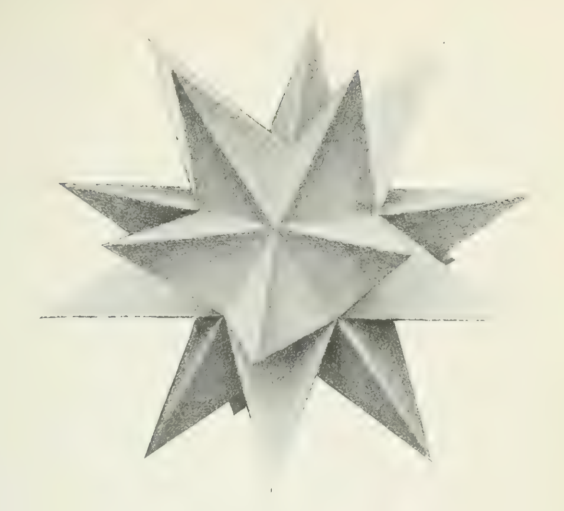
Ikosaeder siebenter Art (*Poinsot*).
Großes Ikosaeder (*Cayley*).



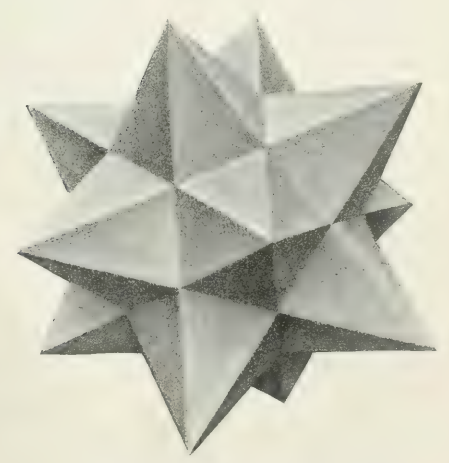
Dodekaeder dritter Art (*Poinsot*).
Großes Dodekaeder (*Cayley*).

Verlag von Wilhelm Engelmann in Leipzig.



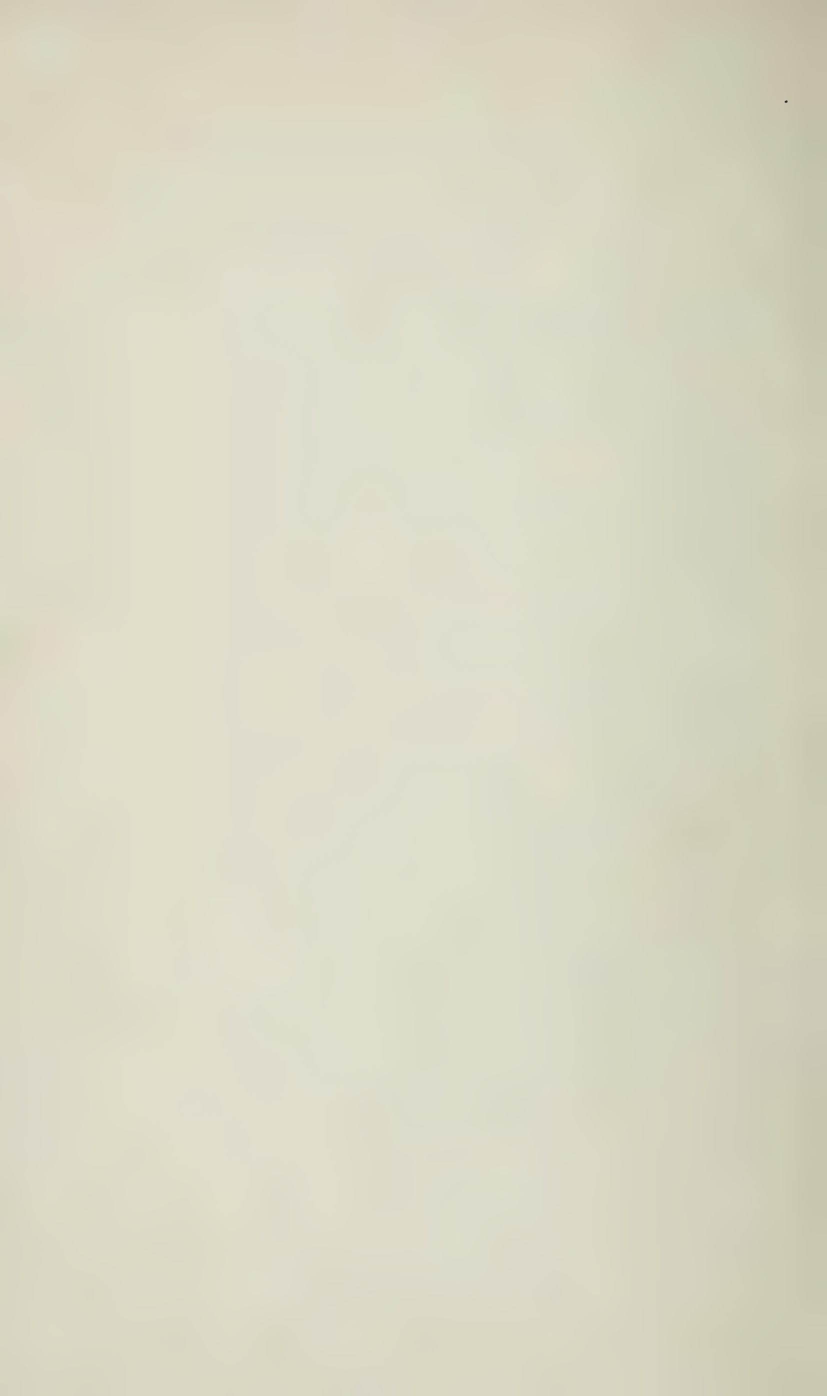


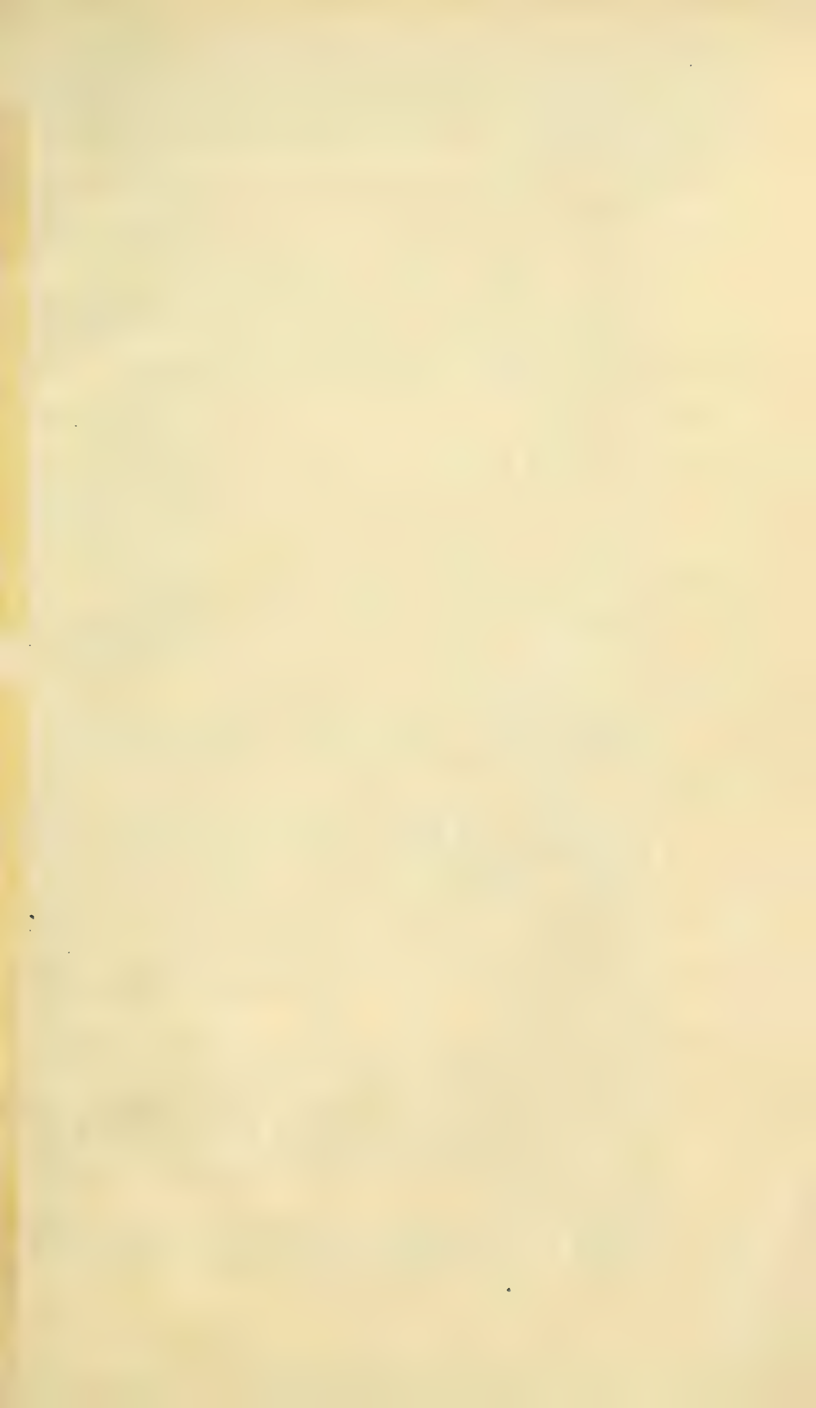
Sterndodekaeder vierter Art (*Poinsot*).
Großes Sterndodekaeder (*Cayley*).
Sterndodekaeder siebenter Art (*Anmerkungen*).



Sterndodekaeder zweiter Art (*Poinsot*).
Kleines Sterndodekaeder (*Cayley*).
Sterndodekaeder dritter Art (*Anmerkungen*).

Verlag von Wilhelm Engelmann in Leipzig.





Nr. 82. **Jacob Steiner**, Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ 1.20.

» 99. **R. Clausius**, Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ —.80.

» 101. **G. Kirchhoff**, Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell**, Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 106. **D'Alembert**, Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 109. **Riccardo Felici**, Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 1.80.

» 111. **N. H. Abel**, Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet**, Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel**, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge**, Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

Nr. 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte u. in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.

» 1[illegible]



